

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE GABÈS

par

Amina BEN HMED

pour obtenir le

DOCTORAT

En Génie Électrique

ANALYSES TEMPORELLE ET FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES D'ORDRE NON ENTIER : APPLICATION À LA COMMANDE

Soutenue le 26 Décembre 2016 devant le jury d'examen composé de:

Mme. Majda LTAIF
M. Moez FEKI
M. Afef ABDELKRIM
M. Mohamed Naceur ABDELKRIM
M. Mohamed AOUN
M. Tarek RAÏSSI

Maître de Conférences à l'ENIG
Professeur à l'ESSTHS
Maître de Conférences à l'ENIC
Professeur à l'ENIG
Maître de Conférences à l'ENIG
Professeur au CNAM-Paris

*Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directeur de Thèse
Membre Invité*

Dédicace

Je dédie ce travail, comme preuve de respect, de gratitude, et de reconnaissance à

Ma chère famille,

Toute personne qui porte de l'estime pour moi.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de laboratoire de recherche Modélisation, Analyse et Commande des Systèmes (MACS) LR16ES22 sous la direction de Monsieur **Mohamed AOUN**, Maître de Conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès.

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse **Mohamed AOUN**, Maître de conférences à l'ENIG pour sa disponibilité, sa qualité scientifique et ses nombreux conseils et sa bienveillance directive pendant toute la durée de ma thèse. Veuillez trouver ici toute ma profonde reconnaissance.

Je témoigne toute ma gratitude à Monsieur **Messaoud AMAIRI**, Maître Assistant à l'ENIG, pour ses multiples conseils, sa qualité scientifique, sa patience, sa bienveillance et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger ce travail. Veuillez trouver ici toute ma profonde reconnaissance.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur **Slaheddine NAJAR**, Maître Assistant à l'ENIG, pour sa qualité humaine, sa qualité scientifique et ses nombreux conseils.

Je tiens à remercier Madame **Majda LTAIF**, Maître de conférences à l'ENIG, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail et d'être le président du jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Moez FEKI**, Professeur à l'ESSTHS, et Madame **Afef ABDELKRIM**, Maître de conférences à l'ENIC, d'avoir accepté la charge de rapporteurs de cette thèse.

Que Monsieur **Mohamed Naceur ABDELKRIM**, Professeur à l'ENIG, trouve ici ma profonde gratitude d'avoir accepté de faire partie de jury de cette thèse en tant qu'examineur.

Je remercie enfin Monsieur **Tarek RAÏSSI** Professeur au CNAM Paris d'avoir accepté l'invitation à participer à ce jury.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres du MACS pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

Table des matières

Notations	xiii
Introduction Générale	1
Chapitre 1	
Généralités sur les systèmes non entiers	
1.1 Introduction	4
1.2 Différenciation d'ordre non entier	4
1.2.1 Définition de l'intégration non entière	5
1.2.2 Définition de la dérivation non entière	6
1.2.3 Transformée de Laplace	9
1.2.4 Caractéristiques fréquentielles d'un intégrateur non entier	10
1.2.5 Caractéristiques fréquentielles d'un dérivateur non entier	11
1.3 Représentation des systèmes non entiers	13
1.3.1 Équation différentielle non entière	13
1.3.2 Représentation d'état non entière	14
1.3.3 Fonction de transfert non entière	14
1.3.3.1 Formes modales factorisées	16
1.3.3.2 Formes modales développées	16
1.4 Systèmes élémentaires d'ordre non entier	17
1.4.1 Classes de systèmes	17
1.4.2 Décomposition modale	18
1.4.2.1 Mode exponentiel	20
1.4.2.2 Multimode apériodique	21
1.4.3 Stabilité	22
1.4.3.1 Définitions et théorèmes de stabilité	23
1.4.3.2 Stabilité du système de première espèce	27
1.4.3.3 Stabilité du système de seconde espèce commensurable	28
1.4.3.4 Stabilité du système de seconde espèce non commensurable	33

1.5 Conclusion 45

Chapitre 2

Analyses fréquentielle et temporelle des systèmes élémentaires d'ordre non entier

2.1 Analyse fréquentielle des systèmes élémentaires d'ordre non entier 46

2.1.1 Résonance d'un système de première espèce 47

2.1.1.1 Condition de résonance 47

2.1.2 Résonance d'un système de seconde espèce 49

2.1.2.1 Condition de résonance 50

2.1.2.2 Abaques de résonance 53

2.1.3 Résonance d'un système de seconde espèce non commensurable 55

2.1.3.1 Condition de résonance 57

2.1.3.2 Abaques de résonance 60

2.2 Analyse temporelle des systèmes élémentaires d'ordre non entier 66

2.2.1 Système élémentaire d'ordre non entier de première espèce 66

2.2.1.1 Effet des pôles en p^α sur les caractéristiques temporelles 66

2.2.1.2 Abaques du premier dépassement et du temps de réponse 68

2.2.1.3 Ordre optimal 69

2.2.2 Système élémentaire d'ordre non entier de seconde espèce 70

2.2.2.1 Effet des pôles réels en p^α sur les caractéristiques temporelles 70

2.2.2.2 Effet des pôles complexes en p^α sur les caractéristiques temporelles 71

2.2.2.3 Paramètres optimaux 76

2.2.2.4 Abaque du premier dépassement 77

2.2.2.5 Abaque du temps de réponse 78

2.2.2.6 Abaque du temps de montée 79

2.2.3 Système élémentaire d'ordre non entier de seconde espèce non commensurable 80

2.2.3.1 Effet des paramètres du système sur les réponses indicelles 80

2.2.3.2 Abaque du premier dépassement 82

2.2.3.3 Abaque du temps de réponse 83

2.2.3.4 Abaque du temps de montée 84

2.3 Conclusion 84

Chapitre 3

Application à la commande

3.1 Introduction 86

3.2	Commande par compensation de pôles	87
3.2.1	Principe	87
3.2.2	Commande d'un système de premier ordre	88
3.3	Commande par un intégrateur non entier I^α	90
3.3.1	Commande d'un système intégrateur	90
3.3.2	Commande et stabilisation d'un système de premier ordre	93
3.3.3	Commande et stabilisation d'un système de premier ordre avec intégration	97
3.4	Stabilisation des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration	101
3.4.1	Stabilisation d'un système incertain de premier ordre	101
3.4.2	Stabilisation d'un système incertain de premier ordre avec intégration	105
3.5	Commande des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration par un régulateur I^α	109
3.5.1	Commande d'un système incertain de premier ordre	109
3.5.2	Commande d'un système incertain de premier ordre avec intégration	113
3.5.2.1	Commande robuste d'un système incertain de premier ordre avec intégration	114
3.5.2.2	Commande robuste en performance d'un système incertain de premier ordre avec intégration	116
3.6	Conclusion	119
	Conclusion générale et perspectives	120
	Bibliographie	123
	Bibliographie de l'auteur	128

Liste des figures

1.1	Variation des coefficients de pondération en fonction de k pour $0 < \alpha \leq 1$.	8
1.2	Variation des coefficients de pondération pour $k = 8$ en fonction de α	8
1.3	Courbes représentatives du facteur d'oubli $\frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}$ pour $0 < \alpha \leq 1$	9
1.4	Diagrammes de Bode d'un intégrateur d'ordre non entier 0.5.	11
1.5	Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre non entier 0.5.	12
1.6	Régions de stabilité dans le plan p^α	26
1.7	Déplacement de pôles en p du système de première espèce pour $1 < \alpha < 3$.	28
1.8	Régions de stabilité et d'instabilité du système de seconde espèce en fonction de ξ et α	33
1.9	Schéma de la boucle fermée équivalente du système de seconde espèce non commensurable.	34
1.10	Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$	35
1.11	Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$	35
1.12	Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$	36
1.13	Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$	37
1.14	Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$	37
1.15	Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$	39
1.16	Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$	39
1.17	Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$	40
1.18	Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$	42

1.19	Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$	42
1.20	Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$	43
1.21	Régions de stabilité et d'instabilité d'un système de seconde espèce non commensurable.	43
1.22	Emplacement de F_1 , F_2 et F_3 dans les régions de stabilité et d'instabilité.	45
2.1	Diagrammes de Bode d'un système non entier de première espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s et $K = 1$	47
2.2	Schéma de la boucle fermée équivalente d'un système non entier de première espèce.	48
2.3	Lieux de Nichols de $\beta(p) = \frac{\omega_n^\alpha}{p^\alpha}$ pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	48
2.4	Diagrammes de Bode d'un système non entier de seconde espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s et $K = 1$	50
2.5	Limite de résonance d'un système stable non entier de seconde espèce ($\forall \omega_n$).	52
2.6	Régions de stabilité et de résonance d'un système non entier de seconde espèce.	53
2.7	Abaques du gain en dB et de fréquence de résonance relatifs à la première résonance.	53
2.8	Abaques du gain en dB et de fréquence de résonance relatifs à la deuxième résonance.	54
2.9	Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 0.5$	56
2.10	Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 1.5$	56
2.11	Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de α avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	57
2.12	Régions de stabilité et de résonance d'un système de seconde espèce non commensurable.	60
2.13	Diagrammes de Bode des systèmes $F_1(p)$ et $F_2(p)$	62
2.14	Diagrammes de Bode du système $F_3(p)$	62

2.15	Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de seconde espèce non commensurable pour $0 < \alpha < 1$	63
2.16	Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de seconde espèce non commensurable pour $1 \leq \alpha \leq 1.9$	64
2.17	Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de seconde espèce non commensurable pour $1.9 < \alpha < 2$	65
2.18	Lieux des pôles en p^α et réponses indicielles pour $\alpha = \{0.4, 0.7, 1, 1.15, 1.8\}$ et $\omega_n = 2$ rad/s.	67
2.19	Lieux des pôles en p^α et réponses indicielles pour $\alpha = \{0.4, 0.7, 1, 1.15, 1.8\}$ et $\omega_n = 0.5$ rad/s.	67
2.20	Abaques du premier dépassement et du temps de réponse d'un système de première espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s et $K = 1$	68
2.21	Abaque du temps de réponse pour $\omega_n = 1$ rad/s et $\omega_n = 2$ rad/s avec $K = 1$	69
2.22	Effet de ω_n sur le pôle p^{α^*} et la réponse indicielle.	70
2.23	Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $\xi > 1$	71
2.24	Effet des paramètres d'un système de seconde espèce sur l'emplacement des pôles en p^α	72
2.25	Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $0 < \alpha < 1$	74
2.26	Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $1 \leq \alpha < 2$	75
2.27	Temps de réponse minimal en fonction des paramètres du système de seconde espèce ξ et α pour $\omega_n = 1$ rad/s.	76
2.28	Emplacement optimal du pôle en p^α d'un système de seconde espèce dans le plan p^α	77
2.29	Abaque du premier dépassement $D_1\%$ d'un système de seconde espèce en fonction de ξ pour $0 < \alpha < 2$	78
2.30	Abaque du temps de réponse t_r en fonction de ξ pour $\omega_n = 1$ rad/s.	79
2.31	Abaque du temps de montée t_m en fonction de ξ pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	80
2.32	Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 0.5$ et $\omega_n = 1$ rad/s.	81

2.33 Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de α avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_n = 1$ rad/s.	81
2.34 Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ω_n avec $\xi = 0.7$ et $\alpha = 1.2$	82
2.35 Abaque du premier dépassement d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α	83
2.36 Abaque du temps de réponse d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	83
2.37 Abaque du temps de montée d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	84
3.1 Boucle de commande à retour unitaire.	87
3.2 Temps de réponse minimal en fonction ξ et α pour $\omega_n = 1$ rad/s.	89
3.3 Réponse indicielle et commande du système corrigé.	90
3.4 Abaques du premier dépassement et du temps de réponse d'un système de première espèce pour différentes valeurs de $\beta = \alpha + 1$ avec $\omega_n = 1$ rad/s.	91
3.5 Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée $F(p)$ pour $k_i = 1$	92
3.6 Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée $F(p)$ pour $k_i = 5$	93
3.7 Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$	94
3.8 Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$ pour $0 < \alpha \leq 1$	95
3.9 Temps de réponse minimal du système désiré en boucle fermée pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	96
3.10 Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée pour $\alpha = 0.8$ et $k_i = 1$	97
3.11 Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$ pour $1 \leq \beta < 2$	98
3.12 Modèle mathématique d'un moteur à courant continu.	99
3.13 Gain à la résonance du système désiré en fonction de ξ pour $1 \leq \beta < 2$	100
3.14 Diagrammes de Bode de la boucle fermée $F(p)$ pour $\alpha = 0.4$	100
3.15 Limites de stabilité et d'instabilité d'un système incertain de premier ordre avec $[b] = [1, 2]$ et $[a] = [-4, 3]$	104

3.16	Diagrammes de Nyquist d'un système incertain en boucle ouverte pour différentes valeurs de a	105
3.17	Limites de stabilité et d'instabilité d'un système incertain de premier ordre avec intégration.	108
3.18	Diagrammes de Nyquist d'un système incertain en boucle ouverte pour différentes valeurs de a et b avec $k_i = 1.5$ et $\alpha = 0.15$	109
3.19	Courbes d'iso-dépassements du système désiré en boucle fermée.	110
3.20	Temps de réponse minimal du système désiré en boucle fermée pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.	111
3.21	Région de stabilité d'un système incertain en boucle fermée pour $G(p) = \frac{1}{p+[-0.02,1.1]}$	112
3.22	Réponses indicielle et commande du système en boucle fermée.	113
3.23	Courbes d'iso-dépassements du système désiré en boucle fermée pour $1 < \beta < 2$ avec $\beta = \alpha + 1$	114
3.24	Réponse indicielle et commande du système incertain en boucle fermée avec $\alpha = 0.15$	116
3.25	Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée.	118
3.26	Réponses indicielles du système incertain en boucle fermée pour différentes valeurs de $a \in [1.5, 7]$ avec $D_1 = 5\%$	119

Liste des tableaux

1.1	Paramètres α_i et ξ_i de chaque fonction F_i	44
2.1	Détermination des paramètres d'un système de seconde espèce non commensurable à partir des spécifications fréquentielles à la résonance. . .	61
3.1	Coefficients $c_{i,j+1}$ de l'équation polynômiale approximée pour quelques premiers dépassements désirés (0%, 2%, 5%, 7%, 10% et 20%) :.	111
3.2	Synthèse des paramètres du régulateur avec un premier dépassement désiré.	115
3.3	Coefficients de $\beta(\xi)$ pour quelques premiers dépassements désirés.	117

Notations

\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers positifs
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres relatifs
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^*	Ensemble des nombres réels non nuls
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{C}	Ensemble des nombres réels complexes
$\mathcal{L}(\cdot)$	Transformée de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$	Transformée inverse de Laplace
$ \cdot $	Module
$ \cdot _{dB}$	Module en dB
$L_1[0, \infty[$	Ensemble des fonctions f de modules intégrables sur $[0, \infty[$
$L_\infty[0, \infty[$	Ensemble des fonctions bornées sur $[0, \infty[$
$*$	produit de convolution
D^n	Opérateur de dérivation à l'ordre n
I^n	Opérateur d'intégration à l'ordre n
$\binom{n}{j}$	Binôme de Newton
<i>BIBO</i>	Entrée bornée sortie bornée (Bounded Input Bounded Output)
<i>ssi</i>	si et seulement si
<i>LTl</i>	Linéaires et Invariants dans le Temps
<i>LPV</i>	Linéaires à paramètres variables
<i>Im</i>	Partie imaginaire
<i>Re</i>	Partie réelle
p	Variable de Laplace
α	Ordre de dérivation non entière
ξ	Pseudo-facteur d'amortissement
ω_n	Pulsation propre
ω_u	Pulsation au gain unité

Introduction Générale

L'idée de généraliser la dérivation à des ordres non entiers est apparue au début de XVII^e siècle dans les travaux de *Leibniz*. Cent ans plus tard, elle est étudiée à l'aide de formalisme mathématique par un grand nombre de mathématiciens célèbres, à savoir : Laplace, Reimann, Grünwald, etc. Aujourd'hui, le calcul non entier est très largement répondu principalement dans la science de physique et de l'ingénierie [Dalir et Bashour, 2010]. Son importance ne cesse de grandir, notamment dans le domaine de l'Automatique pour la modélisation comme pour la commande [Saidi *et al.*, 2015], [Ben Hmed *et al.*, 2015], [Yakoub *et al.*, 2015].

Dans la théorie des systèmes non entiers, l'une des préoccupations est l'analyse de la stabilité. Elle est traitée dans différents contextes (linéaire, non linéaire, commensurable, non commensurable, etc) [Sabatier *et al.*, 2010]. Pour le cas commensurable, des nombreux critères ont été proposés comme le théorème de Matignon [Matignon, 1998] qui a été développé pour un ordre non entier entre 0 et 1. Ce théorème a été ensuite étendu pour les ordres commensurables réels [Aoun, 2005]. Concernant les systèmes d'ordre non commensurable, la stabilité a été étudiée essentiellement à travers des méthodes graphiques basées sur le calcul des pôles stables [Trigeassou et Maamri, 2009, Sabatier *et al.*, 2013] ou sur les critères de Nyquist [Rivero *et al.*, 2013]. L'utilisation consistante de ces méthodes est due à la complexité des méthodes algébriques tels que le critère de Routh et de Jury [Ikeda et Takahashi, 1977].

Dans le domaine de la commande l'objectif est de construire un régulateur qui assure au procédé corrigé les performances désirées conformément à un compromis entre ces exigences et les limites physiques du procédé. La synthèse du régulateur est effectuée à partir de l'état paramétrique nominal. Une modification de cet état nominal se traduit alors par une désadaptation du régulateur au procédé. Il en résulte une modification des performances et parfois à une instabilité du système en boucle fermée. Afin de remédier

aux insuffisances des performances, plusieurs travaux sont portés sur la synthèse des régulateurs robustes entiers et non entiers [Amairi *et al.*, 2014, Oustaloup, 1991, Saidi *et al.*, 2015]. Récemment, des travaux ont été proposés d'enrichir le régulateur PID par deux degrés de liberté supplémentaires qui lui offrent une robustesse [Saidi *et al.*, 2015]. Ces deux degrés permettent d'étendre la dérivation et l'intégration pour prendre en compte des ordres non entiers. Ainsi, les performances des régulateurs non entiers $PI^\alpha D^\beta$ sont démontrées dans plusieurs travaux. En effet, une meilleure flexibilité dans la synthèse et un compromis entre les différentes performances sont assurés avec le régulateur $PI^\alpha D^\beta$.

À ce jour la plupart des méthodes de synthèse proposées dans la littérature sont basées sur l'analyse de la boucle ouverte de la boucle de la commande [Monje *et al.*, 2008, Ben Hmed *et al.*, 2013, Saidi *et al.*, 2015].

Cette thèse propose une nouvelle approche de synthèse de régulateurs à travers l'analyse du comportement de la boucle fermée. Le régulateur est établi directement à partir de l'expression de la boucle fermée sans avoir recours à la boucle ouverte. Pour atteindre cet objectif, il est impératif de revenir sur les caractéristiques temporelles et fréquentielles de la fonction de transfert élémentaire non entière. Ces caractéristiques "basiques" mais essentielles sont malheureusement établies que pour des fonctions élémentaires de première et de seconde espèce [Malti *et al.*, 2010, Malti *et al.*, 2011, Sabatier *et al.*, 2003]. Nous reprenons ses travaux, nous les complétons et l'enrichissons avec d'autre système élémentaire de dimension 2 non commensurables. Nous traitons les caractéristiques temporelles et fréquentielles et nous rétablissons des nouveaux abaques des principales caractéristiques en fonction des ordres de dérivation non entiers du système. Ses abaques permettent la synthèse des régulateurs.

La progression de la thèse est ponctuée par trois chapitres dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le premier chapitre fait l'objet d'une étude bibliographique des notions utilisées dans la théorie des systèmes non entiers. Dans laquelle les différentes définitions des opérateurs de dérivation et d'intégration non entiers, aux différentes formes de représentation de ces systèmes sont présentées. De même, les différentes approches de stabilité des systèmes non entiers présentées dans la littérature sont rappelées. L'étude de stabilité du système

élémentaire non commensurable constitue une première contribution de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse fréquentielle et temporelle des différents systèmes élémentaires d'ordre non entier. Les spécifications fréquentielles à la résonance à savoir le gain, la phase et la fréquence sont déterminées numériquement et tracées pour générer des abaques. De plus, les conditions de résonance sont établies en fonction du pseudo-facteur d'amortissement et de l'ordre du système. Le temps de réponse et le temps de montée ainsi que le premier dépassement sont déterminés numériquement et tracés pour former les abaques temporels des systèmes élémentaires. L'effet des pôles en p^α sur ces comportements est étudié. Les paramètres optimaux fournissant le temps de réponse minimal sont déterminés.

Dans le dernier chapitre, l'accent est mis sur l'utilisation des principales propriétés des systèmes élémentaires d'ordre non entier pour la commande. Une nouvelle technique de commande et de stabilisation est proposée pour les systèmes intégrateurs, premier ordre sans et avec intégration. Cette technique permet d'imposer à la boucle fermée désirée les comportements d'un système élémentaire d'ordre non entier. Ensuite, elle est étendue pour garantir la robustesse en stabilité en cas de présence des incertitudes paramétriques. Les différentes spécifications des systèmes élémentaires sont utilisées dans la conception de commande pour garantir les performances désirées en boucle fermée. Des simulations numériques valident les différentes approches proposées.

Une conclusion et des perspectives achèvent le présent mémoire.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes non entiers

1.1 Introduction

La dérivation à des ordres non entiers est apparue au début de XVII^e siècle après les travaux de *Leibniz*. Cent ans plus tard, elle a été étudiée à l'aide du formalisme mathématique par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme : Laplace, Riemann et Grünwald. Dans la seconde moitié du XX^e siècle et le début du XXI^e siècle, les applications du calcul non entier dans les sciences physiques et de l'ingénierie relèvent des contributions scientifiques. Dans ce cadre, des études théoriques et expérimentales ont montré que certains systèmes thermiques, électrochimiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières [Caputo, 1967, Oldham et Spanier, 1974, Cois, 2002, Sabatier *et al.*, 2006].

Ce chapitre expose d'une manière générale la théorie de la dérivation non entière tout en présentant les différentes définitions de la dérivation non entière, les différentes formes de représentation des systèmes non entiers et l'étude de stabilité de quelques systèmes élémentaires d'ordre non entier.

1.2 Différenciation d'ordre non entier

Le calcul non entier est une généralisation de l'intégration et la dérivation à un ordre non entier α . L'opérateur continu de l'intégré-différentiel est défini comme suit [Kilbas

et al., 2006, Sabatier et al., 2007] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Il existe des fonctions dont les conditions d'existence de dérivation et d'intégration non entières ne sont pas vérifiées. Une classe des fonctions pour laquelle la dérivation et l'intégration non entière existent est alors définie.

Définition 1.1 La fonction $f(t)$ est dite de classe C_α si elle s'écrit sous la forme $f(t) = t^\lambda g(t)$ pour $\lambda > \alpha$ avec $g(t)$ une fonction continue dans $[0, \infty[$.

Théorème 1.1 La dérivée non entière existe si f est de classe C_α et l'intégration non entière existe si $f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, \infty[$ et intégrable sur $[0, t]$.

Dans ce qui suit, toutes les conditions d'existence de dérivation non entière et d'intégration non entière sont supposées vérifiées.

1.2.1 Définition de l'intégration non entière

L'intégrale non entière d'une fonction est définie par la suite.

Définition 1.2 (Intégrale non entière de Riemann-Liouville) : L'intégrale d'ordre non entier $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par [Samko et al., 1993]

$$I_a^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (1.2)$$

où a et t sont les limites de l'intégrale avec $a \in \mathbb{R}$ et Γ est la fonction gamma, telle que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1.3)$$

L'intégrale non entière peut encore être présentée comme le produit de convolution entre les deux fonctions $\frac{1}{\Gamma(\alpha) (t - \tau)^{1-\alpha}}$ et $f(t)$, soit [Samko et al., 1993] :

$$I_a^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha) (t - \tau)^{1-\alpha}} \otimes f(t), \quad (1.4)$$

avec \otimes est le produit de convolution.

Remarque 1.1 Généralement, l'intégrale non entière (1.2) est appelée *intégrale de Riemann-Liouville*. En remplaçant la borne inférieure par $-\infty$, Liouville a proposé la même définition que Riemann. Mais, puisque la majorité des fonctions rencontrées dans le domaine physique sont causales, cette borne est souvent ramenée à 0.

L'intégrale d'ordre non entier α est maintenant donnée par

$$I^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1.5)$$

D'après les définitions précédentes, l'intégrale non entière peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli donné par la fonction $\frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}$.

1.2.2 Définition de la dérivation non entière

Il existe plusieurs définitions pour la dérivation non entière. Parmi lesquelles, on peut citer les trois définitions les plus utilisées dans la littérature à savoir : la définition de Grünwald-Letnikov (GL), la définition de Riemann-Liouville (RL) et la définition de Caputo. D'autres définitions existent aussi comme à titre d'exemple les définitions de Fourier, Cauchy et Abel [Kilbas *et al.*, 2006].

Les trois définitions GL, RL et Caputo sont équivalentes pour une large classe des fonctions sous certaines conditions [Samko *et al.*, 1993].

Définition 1.3 (Dérivation non entière de Riemann-Liouville) : La dérivée d'ordre non entier $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f(t)$ est définie comme étant la dérivée d'ordre entier $[\alpha] + 1$ de l'intégrale d'ordre non entier $[\alpha] + 1 - \alpha$, soit [Riemann, 1876] :

$${}_{RL}D^\alpha f(t) \triangleq \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} (I^{[\alpha]-\alpha+1} f(t)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (1.6)$$

où $[\alpha]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à α .

En utilisant la définition de l'intégration non entière (1.5), l'équation (1.6) devient

$${}_{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha + 1)} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-[\alpha]}} d\tau \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (1.7)$$

Remarque 1.2 La dérivée non entière d'une fonction $f(t)$ s'exprime à partir de toutes les valeurs de la fonction depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t . Cet opérateur possède donc un effet mémoire longue qui le distingue fondamentalement de la dérivée d'ordre entier.

Définition 1.4 (Caputo) : La dérivée d'ordre non entier $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f(t)$ est définie comme étant l'intégrale d'ordre non entier $[\alpha] + 1 - \alpha$ de la dérivée d'ordre entier $[\alpha] + 1$, soit [Caputo, 1967] :

$${}_C D^\alpha f(t) \triangleq I^{[\alpha]-\alpha+1} \left(\frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} f(t) \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (1.8)$$

En tenant compte de la définition de l'intégrale (1.5), l'équation (1.8) s'écrit comme suit :

$${}_C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha + 1)} \left(\int_0^t \frac{f^{[\alpha]+1}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - [\alpha]}} d\tau \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (1.9)$$

Remarque 1.3 La définition de la dérivée d'ordre non entier au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de type non entier qui sont difficiles à interpréter physiquement. Néanmoins, l'avantage principal de la définition au sens de Caputo est que les conditions initiales prennent la même forme que dans le cas entier.

Définition 1.5 (Grünwald-Letnikov) : La dérivée d'ordre non entier $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f(t)$ est définie par [Grünwald, 1867]

$${}_G D^\alpha f(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (1.10)$$

où $\binom{\alpha}{k}$ est le binôme de Newton généralisé à des ordres non entiers tel que :

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} & \text{si } k > 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque 1.4 D'après la définition de Grünwald, la fonction $f(t - kh)$ introduit les termes $f(t)$, $f(t - h)$, $f(t - 2h)$, etc. Ainsi, la dérivée non entière prend en compte les valeurs de $f(t)$ à tous les instants passés. Ceci confirme le caractère de mémoire longue introduit par la dérivée non entière.

Pour voir ce caractère de plus près, l'évolution des coefficients de pondération $(-1)^k \binom{\alpha}{k}$ en fonction de k pour différentes valeurs de α tel que $0 < \alpha \leq 1$ est donnée par la figure (1.1). Cette figure montre que les coefficients ne s'annulent pas pour les ordres non entiers. Mais pour $\alpha = 1$, ils sont tous nuls sauf pour $k = \{0, 1\}$.

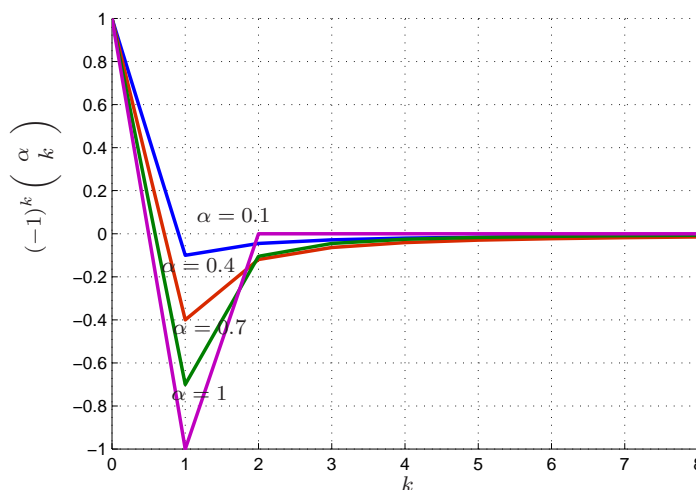


Figure 1.1 – Variation des coefficients de pondération en fonction de k pour $0 < \alpha \leq 1$.

La figure (1.2) présente la variation des coefficients de pondération pour $k = 8$ en fonction de α . Elle montre que ces coefficients ne s'annulent que pour les valeurs entières de α .

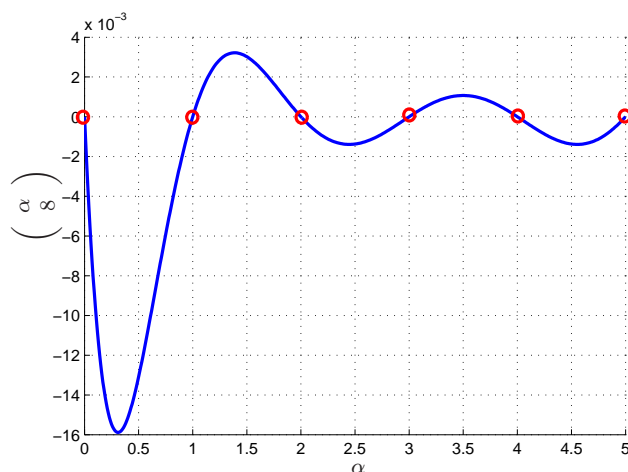


Figure 1.2 – Variation des coefficients de pondération pour $k = 8$ en fonction de α .

Dans le cas $\alpha = 1$, la quantité $\frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}$ vaut 1 et $I^\alpha f(t)$ correspond à l'aire entre f et l'axe des abscisses $[0, t]$. Alors, toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même effet. Par contre, pour l'ordre non entier compris entre 0 et 1, la valeur de l'intégrale en un point t

est plus influencée par les points de son voisinage que par des points plus éloignés [Aoun, 2005]. La figure (1.3) représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de α comprises entre 0.1 et 1.

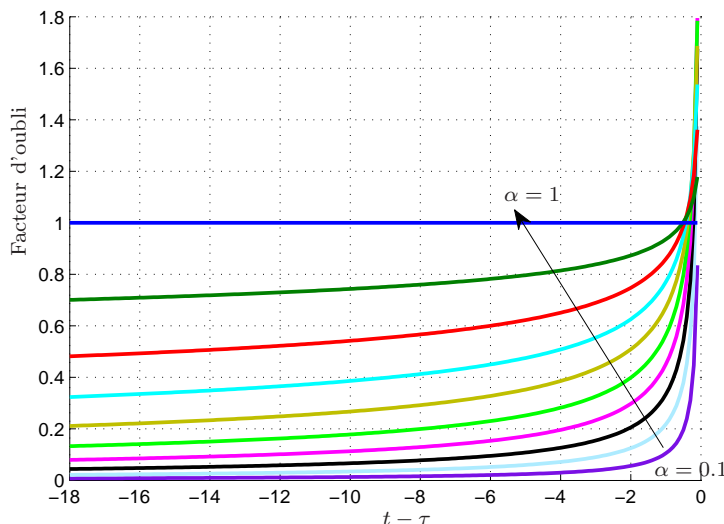


Figure 1.3 – Courbes représentatives du facteur d'oubli $\frac{1}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}$ pour $0 < \alpha \leq 1$.

1.2.3 Transformée de Laplace

L'intégrale de Riemann-Liouville (1.2) peut être évaluée à l'aide de la propriété de la transformée de Laplace du produit de convolution. La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre α d'une fonction réelle f , telle que $f(t) = 0|_{t \leq 0}$, est donnée alors par [Miller et Ross, 1993]

$$\mathcal{L}(I^\alpha f(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}} \otimes f(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}}\right) \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p^\alpha} F(p). \quad (1.12)$$

La transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction réelle causale est donnée selon la définition utilisée :

– Définition de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}({}_{RL}D_t^\alpha f(t)) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [{}_{RL}D_t^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=0}. \quad (1.13)$$

Cette définition exprime des conditions initiales en fonction d'une dérivée non entière calculée à l'origine.

– Définition de Caputo

$$\mathcal{L}({}_C D_t^\alpha f(t)) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0). \quad (1.14)$$

Les conditions initiales de cette définition sont en fonction des dérivées entières calculées à l'origine. Elles sont interprétables physiquement, ce qui la rend la plus adoptée dans le domaine de physique [Kilbas *et al.*, 2006].

Remarque 1.5 Si $f(t)$ est au repos à l'instant $t = 0$, alors les transformées de Laplace de la dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes :

$$\mathcal{L}({}_{RL} D_t^\alpha f(t)) = \mathcal{L}({}_C D_t^\alpha f(t)) = p^\alpha F(p). \quad (1.15)$$

1.2.4 Caractéristiques fréquentielles d'un intégrateur non entier

Un intégrateur non entier est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ est, à un facteur près, l'intégration non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit [Oustaloup, 1995] :

$$y(t) = \frac{1}{\tau^\alpha} I^\alpha u(t), \quad (1.16)$$

où τ désigne la constante de temps d'intégration.

La transformée de Laplace de la relation (1.16) avec les conditions initiales nulles, donne

$$Y(p) = \left(\frac{\omega_u}{p}\right)^\alpha U(p) = I(p) U(p), \quad (1.17)$$

où $\omega_u = \frac{1}{\tau}$ est appelée fréquence de transition.

Les caractéristiques fréquentielles de l'intégrateur non entier sont obtenues de sa transmittance en remplaçant p par $j\omega$, soit :

$$I(j\omega) = \left(\frac{\omega_u}{j\omega}\right)^\alpha. \quad (1.18)$$

Ainsi, le module et l'argument de l'opérateur d'intégration d'ordre α sont donnés par :

$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : 20 \log(|I(j\omega)|) = 20 \log \left| \left(\frac{\omega_u}{j\omega} \right)^\alpha \right| = -20\alpha \log \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right) \\ \text{Argument (rad)} : \arg(I(j\omega)) = \arg \left[\left(\frac{\omega_u}{j\omega} \right)^\alpha \right] = -\alpha \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.19)$$

En ce qui concerne les diagrammes de Bode, l'analyse de ce système d'équations révèle deux propriétés remarquables :

- Un diagramme de gain représenté par une droite oblique de pente -20α dB/décade ;
- Un diagramme de phase représenté par une droite de pente nulle d'ordonnée $-\alpha \frac{\pi}{2}$.

La figure (1.4) représente les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier d'ordre 0.5 pour $\omega_u = 1$ rad/s.

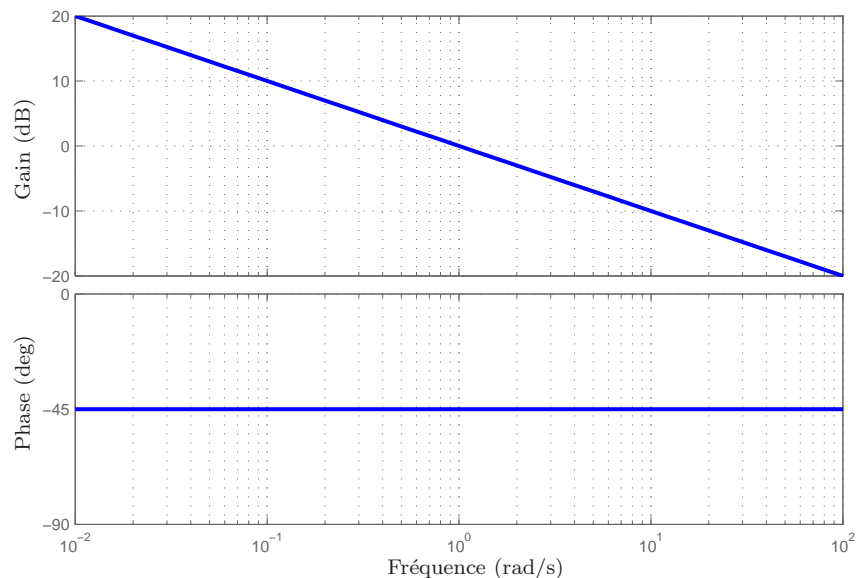


Figure 1.4 – Diagrammes de Bode d'un intégrateur d'ordre non entier 0.5.

1.2.5 Caractéristiques fréquentielles d'un dérivateur non entier

Un dérivateur non entier est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ est, à un facteur près, la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit [Oustaloup, 1995] :

$$y(t) = \tau^\alpha D^\alpha u(t), \quad (1.20)$$

où τ désigne la constante du temps de différenciation.

La transformée de Laplace de la relation (1.20) sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, donne

$$Y(p) = \left(\frac{p}{\omega_u}\right)^\alpha U(p) = D(p)U(p), \quad (1.21)$$

où $\omega_u = \frac{1}{\tau}$ est appelée fréquence de transition.

Les caractéristiques fréquentielles du dérivateur non entier sont obtenues de sa transmittance en remplaçant p par $j\omega$, soit :

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\alpha. \quad (1.22)$$

Le module et l'argument de l'opérateur de dérivation d'ordre α sont donnés par

$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : 20 \log(|D(j\omega)|) = 20 \log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\alpha \right| = 20\alpha \log \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right) \\ \text{Argument (rad)} : \arg(D(j\omega)) = \arg \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\alpha \right] = \alpha \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.23)$$

Le système d'équations (1.23) caractérise la représentation des diagrammes de Bode avec deux propriétés remarquables :

- un diagramme de gain représenté par une droite oblique de pente 20α dB/décade,
- un diagramme de phase représenté par une droite de pente nulle d'ordonnée $\alpha \frac{\pi}{2}$.

La figure (1.5) représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier d'ordre 0.5 pour $\omega_u = 1$ rad/s.

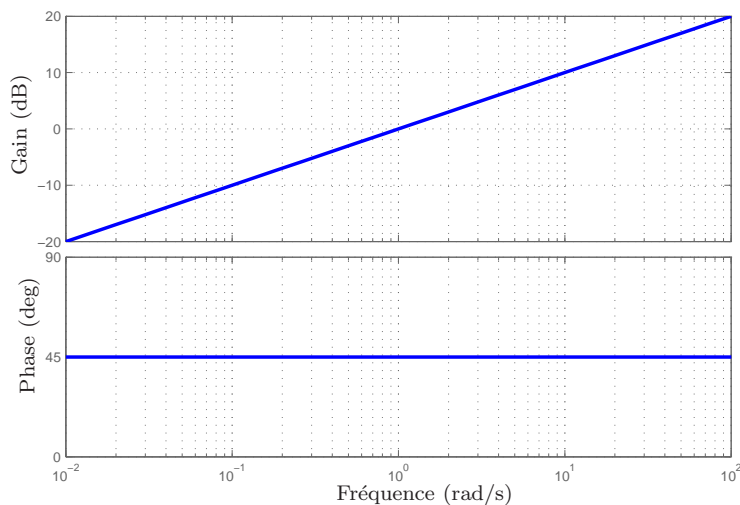


Figure 1.5 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre non entier 0.5.

1.3 Représentation des systèmes non entiers

Dans cette section, les systèmes considérés sont à temps continu, linéaires et invariants dans le temps (LTI), monovariables, strictement propres, causaux et à dérivées non entières. Dans la littérature, ces systèmes peuvent être décrits par :

- une équation différentielle ;
- une représentation d'état ;
- une fonction de transfert.

1.3.1 Équation différentielle non entière

Un système linéaire non entier peut être représenté par une équation différentielle non entière de la forme

$$y(t) + a_1 D^{\alpha_{a_1}} y(t) + \dots + a_n D^{\alpha_{a_n}} y(t) = b_0 D^{\alpha_{b_0}} u(t) + \dots + b_m D^{\alpha_{b_m}} u(t) \quad (1.24)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système. Les ordres de dérivation $(\alpha_{a_1} \dots \alpha_{a_n}, \alpha_{b_0} \dots \alpha_{b_m})$ sont des nombres réels positifs tels que

$$0 < \alpha_{a_1} < \dots < \alpha_{a_n}, \quad 0 < \alpha_{b_0} < \dots < \alpha_{b_m}. \quad (1.25)$$

Si les ordres de dérivation sont des multiples d'un ordre non entier α , alors l'équation différentielle (1.24) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du type séquentiel, soit [Cois, 2002] :

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 D^\alpha y(t) + a_2 D^\alpha (D^\alpha y(t)) \dots + a_n \overbrace{D^\alpha (\dots D^\alpha y(t))}^{\frac{\alpha_{a_n}}{\alpha} \text{ fois}} = \\ b_0 D^\alpha u(t) + b_1 D^\alpha (D^\alpha u(t)) \dots + b_m \overbrace{D^\alpha (\dots D^\alpha u(t))}^{\frac{\alpha_{b_m}}{\alpha} \text{ fois}}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

avec $\frac{\alpha_{a_n}}{\alpha} \in \mathbb{N}$, $\frac{\alpha_{b_m}}{\alpha} \in \mathbb{N}$ où α est le plus grand diviseur positif réel des ordres de dérivation de cette équation appelé **ordre commensurable** [Aoun, 2005].

Remarque 1.6 Pour que le système soit strictement propre, les ordres de dérivation du système non entier doivent vérifier la contrainte suivante $\alpha_{b_m} < \alpha_{a_n}$, comme le cas entier.

1.3.2 Représentation d'état non entière

La représentation d'état classique a été étendue par [Matignon et d'Andréa Novel, 1996] au système non entier d'ordre commensurable. Désormais, l'ordre de différenciation du vecteur d'état peut être non entier. La représentation dans l'espace d'état non entier est alors décrite à l'aide du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

où α est l'ordre commensurable du système, les matrices A , B et C sont de dimensions appropriées et de coefficients constants, appelées respectivement la matrice d'évolution, la matrice de commande, la matrice d'observation et $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement le vecteur d'entrée et de sortie.

Pour les systèmes non entiers, la connaissance de $x(t_0)$ (t_0 étant le temps initial) n'est pas suffisante pour déterminer les comportements futurs du système. En effet, il est nécessaire de connaître tout le passé du système pour pouvoir prédire ses comportements. Alors, le vecteur $x(t)$ ne présente plus les propriétés d'état au sens classique du terme [Cois, 2002]. Pour remédier à ce problème, une représentation diffusive a été utilisée dans plusieurs travaux [Sabatier *et al.*, 2012] pour faire apparaître le vrai état du système non entier. Cette représentation met en jeu un système linéaire classique et un système décrit par une équation parabolique et elle est obtenue à partir de la réponse impulsionnelle du système non entier.

Remarque 1.7 *Dans la suite du rapport les conditions initiales sont supposées nulles. Le système est supposé au repos, son passé est nul, et les dérivées entières et non entières de tous ses grandeurs sont nulles dans le passé.*

1.3.3 Fonction de transfert non entière

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.24) avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert irrationnelle est obtenue telle que

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^{\alpha_{b_j}}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i p^{\alpha_{a_i}}}. \quad (1.28)$$

Dans le cas où le système est commensurable à l'ordre α , la fonction de transfert $F(p)$ est donnée par

$$F(p) = R(p^\alpha) = \frac{Y(p^\alpha)}{U(p^\alpha)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (p^\alpha)^{\frac{\alpha b_j}{\alpha}}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i (p^\alpha)^{\frac{\alpha a_i}{\alpha}}}. \quad (1.29)$$

Une notation particulière de la fonction de transfert commensurable peut être définie par la fonction rationnelle R_α , telle que

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = R_\alpha(p^\alpha) \quad (1.30)$$

avec

$$R_\alpha(s) = \frac{Q_\alpha(s)}{P_\alpha(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\frac{\alpha b_j}{\alpha}}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\frac{\alpha a_i}{\alpha}}}, \quad s = p^\alpha \quad (1.31)$$

où P_α et Q_α sont deux polynômes à puissance entière. Leurs zéros sont respectivement les pôles en p^α et les zéros en p^α de $F(p)$.

Le passage d'une fonction de transfert commensurable (1.29) à une représentation d'état peut être effectué en utilisant la forme campagne suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -\frac{1}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_m}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.32)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Le passage d'une pseudo-représentation d'état (1.27) à une fonction de transfert de la forme (1.28) est effectué en utilisant la transformé de Laplace pour des conditions initiales nulles. La fonction de transfert du système s'écrit alors

$$F(p) = C(p^\alpha I - A)^{-1}B. \quad (1.33)$$

Quelques manipulations mathématiques sur les équations (1.28) et (1.29) donnent naissance à deux formes de représentations : formes modales factorisées et développées.

1.3.3.1 Formes modales factorisées

À partir de ce type de représentation qui met en évidence les zéros et les pôles en p^α de la fonction de transfert, deux niveaux de généralisation sont établies [Aoun, 2005] :

- Dans le premier niveau, les zéros et les pôles en p^α de la fonction de transfert sont tous associés à l'ordre commensurable α . La fonction de transfert est mise sous la forme

$$F(p) = K \frac{\prod_{j=1}^{n_z} (p^\alpha - z_j)^{q_j}}{\prod_{i=1}^{n_p} (p^\alpha - p_i)^{q_i}}, \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad q_i \in \mathbb{N}, \quad (1.34)$$

où K est le gain, z_j avec $j = 1 \dots n_z$ sont les zéros en p^α de multiplicités q_j et p_i avec $i = 1 \dots n_p$ sont les pôles en p^α de multiplicités q_i .

- Dans le second niveau, la fonction de transfert est représentée sous la forme

$$F(p) = K \frac{\prod_{j=1}^{n_z} (p^{\alpha_j} - z_j)^{q_j}}{\prod_{i=1}^{n_p} (p^{\alpha_i} - p_i)^{q_i}}, \quad q_i \in \mathbb{N}, \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad (1.35)$$

où z_j et p_i sont maintenant les zéros en p^{α_j} et les pôles en p^{α_i} de multiplicités respectives q_j et q_i .

1.3.3.2 Formes modales développées

Ces formes mettent en évidence les modes propres du système et elles donnent deux niveaux de généralisations :

- Dans un premier niveau de généralisation, la fonction de transfert est mise sous la

forme

$$F(p) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(p^\alpha - p_i)^{q_i}}, \quad (1.36)$$

où K_i est le gain et p_i avec $i = 1 \dots N$ sont les pôles en p^α de multiplicité q_i .

La fonction de transfert $\frac{K_i}{(p^\alpha - p_i)^{q_i}}$ définit le mode propre de multiplicité q_i [Cois, 2002].

- Dans un deuxième niveau de généralisation, la fonction de transfert est décrite par

$$F(p) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(p^{\alpha_i} - p_i)^{q_i}}, \quad (1.37)$$

où p_i est un pôle en p^{α_i} de multiplicité q_i .

La fonction de transfert $F(p)$ représentée par (1.37), donne naissance à des nouvelles formes de systèmes d'ordre non entier appelés couramment systèmes élémentaires.

1.4 Systèmes élémentaires d'ordre non entier

L'objectif de cette partie est de définir succinctement les différents systèmes élémentaires d'ordre non entier.

1.4.1 Classes de systèmes

Il existe deux classes de systèmes élémentaires non entiers :

- Des systèmes avec un mode propre non entier dont le pôle en p^α est réel appelés systèmes de première espèce et décrits par la forme canonique

$$F(p) = \frac{K}{1 + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^\alpha}, \quad (1.38)$$

avec $K \in \mathbb{R}^*$ est le gain statique, $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ est la pulsation propre et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est l'ordre du système. Ils sont considérés comme la généralisation des systèmes de premier ordre au cas non entier.

- Des systèmes avec deux modes non entiers dont les pôles en p^α sont complexes conjugués appelés systèmes de seconde espèce commensurable et décrits par la

fonction de transfert

$$F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p^\alpha + \frac{1}{\omega_n^2} p^{2\alpha}}, \quad (1.39)$$

avec $K \in \mathbb{R}^*$ est le gain statique, $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ est la pulsation propre, $\xi \in \mathbb{R}$ est le pseudo-facteur d'amortissement et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est l'ordre du système.

Ces systèmes sont considérés comme la généralisation des systèmes de second ordre au cas non entier. Le paramètre ξ n'a pas la même signification que dans le cas entier. ξ est un facteur d'amortissement uniquement pour $\alpha = 1$. Nous le nommons dans ce rapport *pseudo-facteur d'amortissement*.

Une deuxième forme de généralisation du système de second ordre au cas non entier peut être définie à partir de la fonction de transfert d'ordre non commensurable (1.28)

$$F(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^\alpha + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^{\alpha+1}}, \quad (1.40)$$

avec $K \in \mathbb{R}^*$ est le gain statique, $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ est la pulsation propre, $\xi \in \mathbb{R}$ est le pseudo-facteur d'amortissement et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est l'ordre du système. Ce système est appelé système de seconde espèce non commensurable.

Les systèmes non entiers d'ordre commensurable peuvent être décomposés sur la base de deux sous-systèmes de première et seconde espèce à l'aide d'un changement de variable et ils sont largement étudiés dans la littérature [Malti *et al.*, 2008, Sabatier *et al.*, 2003, Hartley et Lorenzo, 1998] [Malti *et al.*, 2008]. Pour les systèmes non entiers d'ordre non commensurables, une forme particulière est considérée pour définir une deuxième généralisation du système de second ordre. Ils sont utilisés pour modéliser par exemple le niveau d'eau dans un réservoir sphérique [Ben Hmed *et al.*, 2015].

1.4.2 Décomposition modale

Dans le cas entier, la décomposition modale d'un système est obtenue selon sa représentation, comme suit [Cois, 2002] :

- Si le système est décrit par une fonction de transfert, alors la décomposition se fait en éléments simples.
- Si le système est décrit par une représentation d'état, alors la décomposition est obtenue par la diagonalisation de la matrice d'évolution.

Dans la suite, l'étude de cas non entier se fait par la diagonalisation de la matrice d'évolution de manière analogue au cas entier. En effet, la décomposition modale du système (1.27) est définie comme suit [Cois, 2002] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Jx(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.41)$$

où J est une matrice de Jordan dont la diagonale fait apparaître les valeurs propres de la matrice A notées λ_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$ de multiplicité d_i tel que $\lambda_i = |\lambda_i| e^{j\varphi_i}$.

Avec des conditions initiales nulles, l'expression analytique de la sortie $y(t)$ est décrite par

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} (C_J (p^\alpha I - J)^{-1} B_J) * u(t). \quad (1.42)$$

Comme la matrice J est Jordan, la matrice $(p^\alpha I - J)^{-1}$ est exprimée alors par [Cois, 2002] :

$$(p^\alpha I - J)^{-1} = \begin{pmatrix} (p^\alpha I - J_{d_1}(\lambda_1))^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & (p^\alpha I - J_{d_i}(\lambda_i))^{-1} & \ddots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & (p^\alpha I - J_{d_r}(\lambda_r))^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

avec

$$(p^\alpha I - J_{d_i}(\lambda_i))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^\alpha - \lambda_i} & \left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_i}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_i}\right)^{d_i} \\ 0 & \frac{1}{p^\alpha - \lambda_i} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_i}\right)^2 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{p^\alpha - \lambda_i} \end{pmatrix}, i \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.44)$$

Ainsi, la sortie $y(t)$ est la combinaison linéaire de modes propres définis par [Cois, 2002]

$$h^{\lambda_i, q}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_i} \right)^q \right), \quad (1.45)$$

où q est un nombre entier désignant la multiplicité de la valeur propre λ_i avec $q \in \{1, \dots, d_i\}$ et $i \in \{1, \dots, r\}$.

Chaque mode donné par (1.45) peut être décomposé en deux parties pour λ_i différente de zéro [Oustaloup, 1983] tel que :

$$h^{\lambda_i, q}(t) = h_{\text{exp}}^{\lambda_i, q}(t) + h_{\text{ap}}^{\lambda_i, q}(t), \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.46)$$

avec $h_{\text{exp}}^{\lambda_i, q}(t)$ est la partie exponentielle de mode et $h_{\text{ap}}^{\lambda_i, q}(t)$ est la partie apériodique de mode.

1.4.2.1 Mode exponentiel

Le mode exponentiel résulte du calcul des résidus en chaque pôle de $\left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_i}\right)^q$ [Cois, 2002]. Ces pôles sont les solutions de l'équation caractéristique

$$p^\alpha - \lambda_i = 0. \quad (1.47)$$

Le pôle d'indice k associé à la valeur propre λ_i est décrit par

$$p_k^{\lambda_i} = |p_k^{\lambda_i}| e^{j\theta_k^{\lambda_i}}, \quad (1.48)$$

tel que

$$|p_k^{\lambda_i}| = |\lambda_i|^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1.49)$$

$$\theta_k^{\lambda_i} = \frac{\arg(\lambda_i)}{\alpha} + \frac{2l\pi}{\alpha}, \quad (1.50)$$

avec

$$-\frac{\alpha}{2} - \frac{\arg(\lambda_i)}{2\pi} < l < \frac{\alpha}{2} - \frac{\arg(\lambda_i)}{2\pi}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (1.51)$$

La réponse impulsionnelle $h_{\text{exp}}^{\lambda_i, q}(t)$ est définie en [Matignon, 1998] par

$$h_{\text{exp}}^{\lambda_i, q}(t) = \sum_{k=1}^{np} \frac{p_k^{\lambda_i}}{\lambda_i^q} Q_{q-1} \left(\frac{1}{\alpha}, tp_k^{\lambda_i} \right) e^{tp_k^{\lambda_i}}, \quad (1.52)$$

où np est le nombre des valeurs de l qui vérifient l'inégalité (1.51) et $Q_\kappa(x, y)$ est un polynôme de deux variables donné par

$$Q_\kappa(x, y) = \begin{cases} x, & \text{si } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\kappa} \left((xy + x - y) Q_{\kappa-1}(x, y) + xy \frac{\partial}{\partial y} Q_{\kappa-1}(x, y) \right), & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.53)$$

Dans le cas où $q = 1$, l'expression $h_{\text{exp}}^{\lambda_i, q}(t)$ se réduit à

$$h_{\text{exp}}^{\lambda_i}(t) = \sum_{k=1}^{np} \frac{p_k^{\lambda_i}}{\alpha \lambda_i} e^{tp_k^{\lambda_i}}. \quad (1.54)$$

La réponse générée par le mode exponentiel défini par (1.52) est similaire à celle générée par un système entier. Ainsi, la diminution de la vitesse du mode exponentiel est directement liée au module de pôles $p_k^{\lambda_i}$ noté $|\lambda_i|^{\frac{1}{\alpha}}$, alors que son amortissement est défini par l'argument de ces pôles $\theta_k^{\lambda_i}$ [Sabatier *et al.*, 2003].

1.4.2.2 Multimode apériodique

Le mode apériodique est caractérisé par une mémoire longue, résultant du calcul d'une intégrale le long de la coupure du plan complexe. Il est défini en [Matignon, 1998], [Oustaloup, 1983] et [Sabatier *et al.*, 2003] par

$$h_{\text{ap}}^{\lambda_i, q}(t) = \int_0^{+\infty} \mu^{\lambda_i, q}(\tau) e^{-t\tau} d\tau, \quad (1.55)$$

où

$$\mu^{\lambda_i, q}(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \frac{q!}{k!(q-k)!} (\lambda_i)^k \tau^{\alpha(q-k)} \sin[\alpha\pi(q-k)]}{[\tau^{2\alpha} - 2\lambda_i \tau^\alpha \cos(\alpha\pi) + \lambda_i^2]^q} d\tau. \quad (1.56)$$

Dans le cas où $q = 1$, l'expression $h_{\text{ap}}^{\lambda_i, q}(t)$ se réduit à

$$h_{\text{ap}}^{\lambda_i}(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^\alpha e^{-t\tau}}{\tau^{2\alpha} - 2\lambda_i \tau^\alpha \cos(\alpha\pi) + \lambda_i^2} d\tau. \quad (1.57)$$

Dans le but de faciliter l'étude temporelle du mode défini par (1.55), Sabatier *et al*

[Sabatier *et al.*, 2003] ont défini une fonction $\phi_{ap}(k, t)$ décrite par

$$\phi_{ap}(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \frac{\sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \frac{q!}{k!(q-k)!} e^{-j2q\varphi_i \tau^{\alpha(q-k)}} \sin[\alpha\pi(q-k)]}{[e^{-j2\varphi_i \tau^{2\alpha}} - 2e^{-j\varphi_i \tau^{\alpha}} \cos(\alpha\pi) + 1]^q} d\tau. \quad (1.58)$$

Les comportements asymptotiques de $\phi_{ap}(k, t)$ sont données d'après [Matignon, 1998] et [Sabatier *et al.*, 2003] par

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi_{ap}(k, t) = +\infty \quad (1.59)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{ap}(k, t) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_{ap}(k, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} Kt^{-1-\alpha}, K \in \mathbb{C} \quad (1.60)$$

De plus, le changement de variable

$$z = \frac{\tau}{|\lambda_i|^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (1.61)$$

permet d'obtenir

$$h_{ap}^{\lambda_i, q}(k, t) = |\lambda_i|^{\frac{1}{\alpha-q}} \phi_{ap}\left(k, |\lambda_i|^{\frac{1}{\alpha}} t\right). \quad (1.62)$$

Cette relation montre que la diminution de la vitesse du mode aperiodique est directement liée au module de la valeur propre λ_i pour un ordre donné α .

1.4.3 Stabilité

Une des préoccupations de la théorie des systèmes non entiers est la stabilité qui a été traitée dans différents contextes : linéaire, non-linéaire, commensurable, non-commensurable, etc. [Sabatier *et al.*, 2010]. Pour le cas linéaire commensurable, des nombreux théorèmes ont été proposés dont le plus connu est celui de Matignon [Matignon, 1998] qui a été développé pour un ordre non entier entre 0 et 1. Ce théorème a été ensuite étendu aux ordres commensurables entre 0 et 2 [Aoun *et al.*, 2007]. Cependant en cas des ordres non commensurables, la stabilité a été essentiellement étudiée à travers des méthodes graphiques, soit en calculant le nombre des pôles stables comme dans [Trigeassou et Maamri, 2009, Sabatier *et al.*, 2013], soit en utilisant le lieu des racines et le critère de Nyquist [Rivero *et al.*, 2013]. L'utilisation de dernières méthodes est due à la complexité des approches algébriques tels que le critère de Routh et de Jury [Ikeda et Takahashi, 1977]. Dans ce contexte, en se basant sur une réalisation en boucle fermée récursivement

imbriquée et le critère de Cauchy, Sabatier *et al* ont développé un algorithme numérique pour calculer le nombre de pôles stables [Sabatier *et al.*, 2013]. Plus récemment, des méthodes basées sur l'inégalité matricielle linéaire (LMI) et Lyapunov ont été largement utilisées pour étudier la stabilité [Sabatier *et al.*, 2010, Yin *et al.*, 2014, Chen *et al.*, 2014, Zhou *et al.*, 2014].

Comme les systèmes élémentaires rationnels n'ont pas les mêmes conditions de stabilité que les systèmes élémentaires d'ordre non entiers qui peuvent avoir des racines dans le demi-plan complexe droit [Aoun, 2005], la stabilité des systèmes élémentaires de première et de seconde espèce ont fait l'objet des plusieurs travaux de recherche [Malti *et al.*, 2010, Charef et Nezzari, 2011] où elle a été déterminée en terme de l'ordre de différenciation α et le pseudo-facteur d'amortissement ξ [Malti *et al.*, 2011]. L'objectif principal de cette section est de déterminer les conditions de stabilité des systèmes élémentaires non entiers.

1.4.3.1 Définitions et théorèmes de stabilité

Dans cette section, les définitions et les théorèmes relatifs à la stabilité des systèmes non entiers sont présentés.

Définition 1.6 [Matignon, 1996] : *Un système linéaire d'ordre non entier d'entrée u , de sortie y et de réponse impulsionnelle h est stable dans le sens entrée bornée sortie bornée (BIBO) ssi*

$$\forall u \in L_\infty [0, \infty[, \text{ on a } y = h \otimes u \in L_\infty [0, \infty[, \quad (1.63)$$

et on vérifie alors

$$\|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty \quad \text{si } h \in L_1 [0, \infty[\quad (1.64)$$

Matignon a présenté le premier théorème de stabilité BIBO pour les systèmes non entiers dont la démonstration est donné plus tard dans [Bonnet, 2000].

Théorème 1.2 [Matignon, 1996] : *Un système non entier décrit par sa fonction de transfert $F(p)$ est BIBO-stable ssi*

$$\forall p \text{ tel que } \Re(p) \geq 0, \quad \exists M, \quad |F(p)| \leq M. \quad (1.65)$$

Si de plus $F = \frac{Q}{P}$ est commensurable et irréductible, alors elle est stable dans le sens

BIBO ssi $P(p) = 0$ n'admet aucune racine à partie réelle positive, c'est à dire

$$\forall p, \quad \Re(p) \geq 0, \quad P(p) \neq 0. \quad (1.66)$$

Si de plus F est d'ordre commensurable tel que $0 < \alpha < 1$, la condition de stabilité peut être déterminée en utilisant les pôles en p^α comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.3 [Matignon, 1996] : *Un système non entier décrit par sa fonction de transfert irréductible et commensurable $F(p^\alpha) = \frac{Q(p^\alpha)}{P(p^\alpha)}$ avec $0 < \alpha < 1$ est BIBO-stable ssi*

$$\forall p^\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad P(p^\alpha) \neq 0, \quad \text{on a} \quad |\arg(p^\alpha)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.67)$$

Ce théorème a été étendu pour les ordres commensurables entre $1 < \alpha < 2$ dans [Moze et al., 2005] et pour n'importe quel ordre commensurable dans [Aoun, 2005].

Théorème 1.4 ([Matignon, 1998] étendu) : *Un système non entier décrit par sa fonction de transfert d'ordre commensurable α est BIBO-stable ssi*

$$0 < \alpha < 2, \quad (1.68)$$

et

$$\forall p_k^\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad P(p_k^\alpha) = 0, \quad \text{on a} \quad |\arg(p_k^\alpha)| > \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.69)$$

avec $\{p_k^\alpha\}_{k=1,\dots,N}$ est l'ensemble des pôles en p^α de $F(p)$ tel que $P(p_k^\alpha) = 0$.

Démonstration 1.1 *La démonstration du Théorème (1.4) se fait par l'absurde tel qu'il suffit de démontrer que $F(p)$ est instable ssi*

$$\alpha \geq 2, \quad (1.70)$$

ou

$$\forall p_k^\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad P(p_k^\alpha) = 0, \quad \text{on a} \quad |\arg(p_k^\alpha)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.71)$$

La coupure du plan complexe le long de \mathbb{R}_- donne un argument de pôle en p dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, tel que [Aoun, 2005]

$$p_{l,k} = |p_k^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j \left(\frac{\arg(p_k^\alpha) + 2l\pi}{\alpha} \right)}, \quad k = 1 \dots N, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (1.72)$$

avec

$$-\pi < \frac{\arg(p_k^\alpha) + 2l\pi}{\alpha} < \pi. \quad (1.73)$$

D'après le théorème de Routh-Hurwitz, le système $F(p)$ est instable ssi il existe un pôle à partie réelle positive

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(p_{l,k}) < \frac{\pi}{2}, \quad (1.74)$$

c'est à dire

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\arg(p_k^\alpha) + 2l\pi}{\alpha} < \frac{\pi}{2}. \quad (1.75)$$

Par conséquent, $F(p)$ est instable ssi il existe $l \in \mathbb{Z}$ satisfaisant l'inégalité suivante

$$-\frac{\alpha\pi}{2} - \arg(p_k^\alpha) < 2l\pi < \frac{\alpha\pi}{2} - \arg(p_k^\alpha). \quad (1.76)$$

Pour plus de simplicité et sans aucune perte de généralité, la détermination principale des pôles en p_k^α est définie dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ [Aoun, 2005].

Selon la valeur de l'ordre non entier α , deux cas peuvent se distinguer :

- Pour $\alpha \geq 2$, $l = 0$ vérifie la contrainte (1.76) car $\arg(p_k^\alpha) \in]-\pi, \pi[$, alors $F(p)$ possède au moins N pôles instables $p_{0,k}$, $k = 1 \dots N$.
- Pour $\alpha < 2$, $l = 0$ est l'unique valeur admissible de l qui satisfait la relation (1.76) car $-\frac{\alpha\pi}{2} - \arg(p_k^\alpha) \leq 0 \leq \frac{\alpha\pi}{2} - \arg(p_k^\alpha)$.

Par conséquent, $F(p)$ est instable s'il existe au moins p_k^α qui vérifie la relation $|\arg(p_k^\alpha)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$.

En tenant compte des résultats obtenus pour $\alpha \geq 2$ et $\alpha < 2$, le système non entier décrit par la fonction de transfert $F(p)$ est instable ssi

$$\alpha \geq 2, \quad (1.77)$$

ou

$$\exists p_k^\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad P_\alpha(p_k^\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad |\arg(p_k^\alpha)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.78)$$

■

Selon l'intervalle de variation de l'ordre α ($\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha > 2$), les systèmes d'ordre commensurable admettent cinq régions de stabilité. Dans le cas classique $\alpha = 1$, le théorème de Matignon est équivalent à celui de Routh-Hurwitz

comme elle montre la figure (1.6).

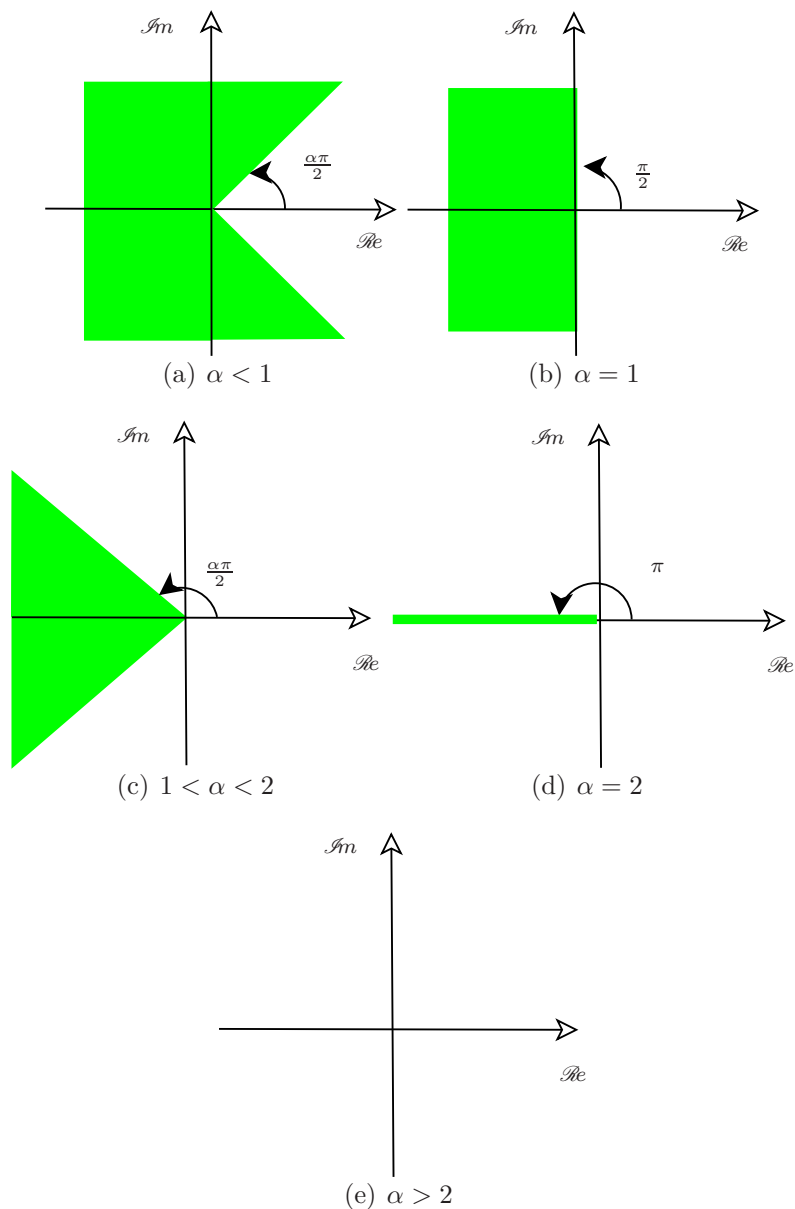


Figure 1.6 – Régions de stabilité dans le plan p^α .

Le théorème de stabilité (1.4) est considéré comme le plus pratique pour étudier la stabilité des systèmes commensurables. Ce théorème peut être utilisé pour déterminer les conditions de stabilité des systèmes élémentaires non entiers de première et de seconde espèce. Cependant, pour les systèmes non commensurables le critère de Matignon est inapplicable. De ce fait, une méthode graphique basée sur le critère de Nyquist peut être utilisée pour établir la condition de stabilité du système de seconde espèce non commensurable.

1.4.3.2 Stabilité du système de première espèce

On rappelle que le système de première espèce est décrit par la forme canonique

$$F(p) = \frac{K}{1 + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^\alpha}, \quad (1.79)$$

avec $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$, $K \in \mathbb{R}^*$ sont respectivement la pulsation propre et le gain du système.

L'analyse de stabilité du système de première espèce peut se faire par deux approches, la première basée sur les pôles en p et la seconde sur les pôles en p^α . Les pôles en p du système de première espèce peuvent être déterminés à partir de la résolution de l'équation caractéristique

$$\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^\alpha + 1 = 0, \quad (1.80)$$

qui donne [Aoun, 2005]

$$p_l = |p^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\left(\frac{\arg(p^\alpha) + 2l\pi}{\alpha}\right)} = \omega_n e^{j\left(\frac{\pi + 2l\pi}{\alpha}\right)}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (1.81)$$

Avec la contrainte issue de la coupure du plan complexe pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, l'argument du pôle en p est donné par

$$-\pi < \arg(p_l) < \pi, \quad (1.82)$$

ce qui donne

$$-1 < \frac{1 + 2l}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \frac{-(\alpha + 1)}{2} < l < \frac{\alpha - 1}{2}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (1.83)$$

Suivant la valeur de α , trois cas se distinguent :

- Pour $\alpha = 1$, le système admet un pôle à partie réelle négative donc il est stable.
- Pour $\alpha < 1$, le système n'admet aucun pôle satisfaisant la condition (1.83), donc il est stable.
- Pour $1 < \alpha < 3$, il existe seulement deux valeurs de l satisfaisant la condition (1.83), à savoir : $l = 0$ et $l = -1$ qui conduisent à deux pôles $p_0 = e^{j\frac{\pi}{\alpha}}$ et $p_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{\alpha}}$.

Le déplacement des pôles associés à $l = 0$ et $l = -1$ pour différentes valeurs de α entre 1 et 3 est présenté dans la figure (1.7). Il montre l'existence de plusieurs cas :

- Lorsque α varie de 1 à 2, les deux pôles p_0 et p_{-1} sont stables et se rapprochent du demi-plan complexe droit avec un argument qui évolue de $\pm\pi$ à $\pm\frac{\pi}{2}$.
- Pour $\alpha = 2$, les pôles en p sont situés sur la limite de stabilité.

- Pour les valeurs de $\alpha > 2$, les pôles sont situés dans la zone de l'instabilité.

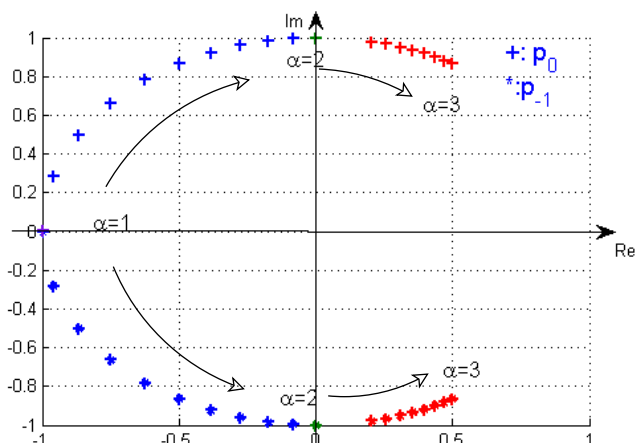


Figure 1.7 – Déplacement de pôles en p du système de première espèce pour $1 < \alpha < 3$.

- Pour $\alpha \geq 3$, l peut prendre plus que deux valeurs dont -1 et 0 . Ceci donne au moins deux pôles instables $p_0 = e^{j\frac{\pi}{\alpha}}$, $p_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{\alpha}}$.

Cette étude confirme que le système de première espèce est stable ssi $0 < \alpha < 2$. Le système de première espèce admet un seul pôle en p^α donné par $p^\alpha = -\omega_n^\alpha = \omega_n^\alpha e^{j\theta}$, avec $\theta = \pi$. Ainsi, d'après le théorème (1.4), le système est stable ssi $0 < \alpha < 2$ car $0 < \frac{\alpha\pi}{2} < \theta$.

1.4.3.3 Stabilité du système de seconde espèce commensurable

Le système de seconde espèce est décrit par

$$F(p) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} p^{2\alpha} + \frac{2\xi}{\omega_n} p^\alpha + 1}. \quad (1.84)$$

L'analyse de stabilité du système peut être effectuée par deux méthodes : la première utilise les pôles en p alors que la seconde utilise les pôles en p^α .

1.4.3.3.1 Analyse de stabilité par les pôles en p

Pour appliquer le théorème de stabilité (1.4), il est nécessaire de calculer les pôles en p^α et de déterminer l'argument des pôles en p . Comme dans le cas entier, deux cas se présentent :

- Cas où $|\xi| < 1$

Dans ce cas le système possède deux pôles complexes conjugués présentés par

$$p_{1,2}^\alpha = \omega_n \left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right). \quad (1.85)$$

Les pôles en p sont quant à eux décrits par

$$p_{l,k} = |p_k^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\left(\frac{\arg(p_k^\alpha)+2l\pi}{\alpha}\right)}, \quad k = \{1, 2\} \quad \text{et} \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (1.86)$$

Si de plus $0 \leq \xi < 1$, alors ces deux pôles sont définis par

$$p_{l,1} = |p_1^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_1} \quad (1.87)$$

et

$$p_{l,2} = |p_2^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_2} \quad (1.88)$$

avec

$$\theta_1 = \frac{\left(\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \right) \right) + 2l\pi}{\alpha} \quad (1.89)$$

et

$$\theta_2 = \frac{-\left(\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \right) \right) + 2l\pi}{\alpha} \quad (1.90)$$

où $|p_1^\alpha| = |p_2^\alpha| = \omega_n$.

Dans le cas où $-1 < \xi \leq 0$, les deux pôles sont donnés par

$$p_{l,1} = |p_1^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_1} \quad (1.91)$$

et

$$p_{l,2} = |p_2^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_2} \quad (1.92)$$

avec

$$\theta_1 = \frac{\left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \right) \right) + 2l\pi}{\alpha} \quad (1.93)$$

et

$$\theta_2 = \frac{-\left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \right) \right) + 2l\pi}{\alpha} \quad (1.94)$$

– **Cas où $|\xi| \geq 1$**

Dans ce cas, les deux pôles sont réels et ils sont présentés par

$$p_{1,2}^\alpha = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right). \quad (1.95)$$

Les pôles en p pour $\xi > 1$ sont donnés alors par

$$p_{l,1} = |p_1^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_1} \quad (1.96)$$

et

$$p_{l,2} = |p_2^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_2} \quad (1.97)$$

avec

$$\theta_1 = \left(\frac{\pi + 2l\pi}{\alpha} \right) \quad (1.98)$$

et

$$\theta_2 = \left(\frac{\pi + 2l\pi}{\alpha} \right). \quad (1.99)$$

où $|p_1^\alpha| = \left| -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right|$ et $|p_2^\alpha| = \left| -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right|$.

Dans le cas particulier $\xi = 1$, le système admet deux pôles réels doubles donnés par :

$$p_{l,1} = p_{l,2} = |\omega_n|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta}, \quad (1.100)$$

avec $\theta = \left(\frac{\pi + 2l\pi}{\alpha} \right)$, $l \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, si $\xi < -1$ alors les deux pôles réels en p^α sont décrits par

$$p_{1,2}^\alpha = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} > 0. \quad (1.101)$$

Ainsi, les deux pôles en p sont

$$p_{l,1} = |p_1^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_1} \quad (1.102)$$

et

$$p_{l,2} = |p_2^\alpha|^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\theta_2} \quad (1.103)$$

avec

$$\theta_1 = \left(\frac{2l\pi}{\alpha} \right) \quad (1.104)$$

et

$$\theta_2 = \left(\frac{2l\pi}{\alpha} \right) \quad (1.105)$$

où $|p_1^\alpha| = \left| -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right|$ et $|p_2^\alpha| = \left| -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \right|$.

D'après le théorème (1.2), le système de seconde espèce est instable ssi il admet au moins un pôle en p dans le demi-plan complexe droit tel que son argument vérifie la relation

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\arg(p_{1,2}^\alpha) + 2l\pi}{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.106)$$

Par conséquent, la fonction de transfert $F(p)$ est instable ssi il existe un $l \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$-\alpha\frac{\pi}{2} - \arg(p_{1,2}^\alpha) \leq 2l\pi \leq \alpha\frac{\pi}{2} - \arg(p_{1,2}^\alpha). \quad (1.107)$$

1.4.3.3.2 Analyse de stabilité par les pôles en p^α

Cette partie est consacrée à l'analyse de stabilité par les pôles en p^α dans laquelle on distingue deux cas :

- Pour $|\xi| < 1$, les deux pôles complexes conjugués sont décrits par (1.85) avec un argument $0 < \theta < \pi$ donné par

$$\theta = \begin{cases} \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) & \text{si } 0 \leq \xi < 1 \\ \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) & \text{si } -1 < \xi \leq 0 \end{cases} \quad (1.108)$$

Étant donné que le système est stable ssi $0 < \frac{\alpha\pi}{2} < \theta < \pi$, deux cas se distinguent selon ξ [Malti *et al.*, 2010] :

- Si $-1 < \xi \leq 0$, alors $\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, d'après le théorème (1.4) le système est stable ssi

$$0 < \alpha\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.109)$$

L'introduction de (1.108) dans (1.109) conduit alors à

$$\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} < \tan\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (1.110)$$

qui est équivalent à

$$\tan^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) < \frac{1-\xi^2}{\xi^2} < \infty, \quad (1.111)$$

ce qui donne

$$\xi^2 < \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (1.112)$$

La valeur de ξ étant négative, la condition de stabilité est exprimée alors par

$$-1 < -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) < \xi \leq 0. \quad (1.113)$$

- Si $0 \leq \xi < 1$, alors $\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} < 0$ et $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Donc, d'après le théorème (1.4) le système est stable ssi

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (1.114)$$

De même en remplaçant (1.108) dans (1.114), on obtient

$$\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi\right) < \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} < 0, \quad (1.115)$$

qui est équivalent à

$$0 < \frac{1-\xi^2}{\xi^2} < \tan^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad (1.116)$$

ce qui donne

$$\xi^2 > \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (1.117)$$

La valeur de ξ étant positive, la condition de stabilité pour $1 < \alpha < 2$ est

$$0 < -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) < \xi < 1. \quad (1.118)$$

Par conséquent, le système de seconde espèce est stable ssi [Malti *et al.*, 2011]

$$\xi > -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad 0 < \alpha < 2. \quad (1.119)$$

La figure (1.8) présente les régions de stabilité et d'instabilité pour différentes valeurs

de α et ξ .

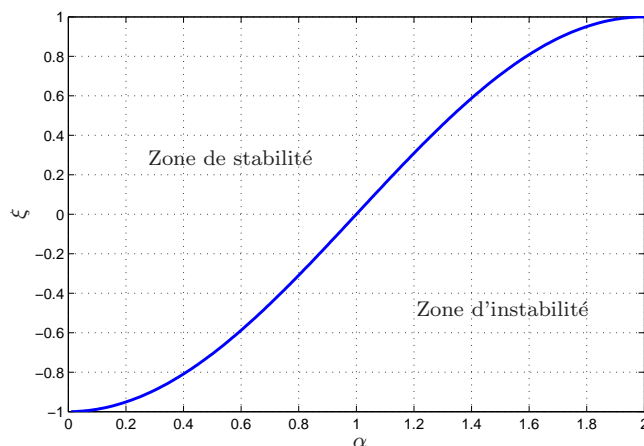


Figure 1.8 – Régions de stabilité et d'instabilité du système de seconde espèce en fonction de ξ et α .

- Pour $\xi \geq 1$, les pôles en p^α donnés par (1.95) sont réels et négatifs donc le système est stable. De plus, la condition de stabilité citée dans le théorème (1.4) est vérifiée tel que

$$|\arg(p_{1,2}^\alpha)| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in]0, 2[. \quad (1.120)$$

1.4.3.4 Stabilité du système de seconde espèce non commensurable

Les résultats de stabilité trouvés précédemment [Malti *et al.*, 2010, Malti *et al.*, 2011] ne sont plus valables pour le système de seconde espèce non commensurable décrit par

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^{\alpha+1} + 2\xi\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^\alpha + 1}. \quad (1.121)$$

Notre contribution consiste à déterminer les conditions de stabilité en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ et de l'ordre non entier α . L'idée est de définir le système de seconde espèce non commensurable comme deux fonctions de transferts imbriquées en boucle fermée (figure (1.9)).

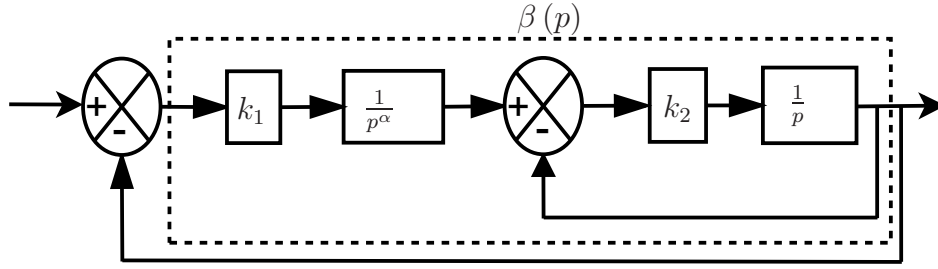


Figure 1.9 – Schéma de la boucle fermée équivalente du système de seconde espèce non commensurable.

La fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(p)$ est donnée par

$$\beta(p) = \frac{k_1 k_2}{p^\alpha (p + k_2)}, \quad (1.122)$$

avec $k_1 = \frac{\omega_n^\alpha}{2\xi}$ et $k_2 = 2\xi\omega_n$.

Dans le plan complexe, le système en boucle ouverte $\beta(j\omega)$ est décrit par

$$\beta(j\omega) = \mathcal{R}e(\beta(j\omega)) + j\mathcal{I}m(\beta(j\omega)), \quad (1.123)$$

avec

$$\mathcal{R}e(\beta(j\omega)) = \frac{\omega_n^{\alpha+1} \left(2\xi\omega_n \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \omega \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)}{4\xi^2\omega_n^2\omega^\alpha + \omega^{\alpha+2}}, \quad (1.124)$$

$$\mathcal{I}m(\beta(j\omega)) = \frac{-\omega_n^{\alpha+1} \left(\omega \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 2\xi\omega_n \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)}{4\xi^2\omega_n^2\omega^\alpha + \omega^{\alpha+2}}. \quad (1.125)$$

Les conditions de stabilité du système de seconde espèce non commensurable sont établies en analysant la boucle ouverte $\beta(j\omega)$.

Proposition 1.1 *Si $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$, alors le système de seconde espèce non commensurable (1.121) est stable.*

Démonstration 1.2 *Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$, l'argument de la boucle ouverte est donnée par :*

$$\arg(\beta(j\omega)) = \frac{-\alpha\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right). \quad (1.126)$$

Comme $\frac{-\pi}{2} \leq \frac{-\alpha\pi}{2} < 0$ et $\frac{-\pi}{2} < -\arctan\left(\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right) < 0$, l'argument de la boucle ouverte appartient à $]-\pi, 0[$.

Pour les basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$), l'argument tend vers $-\frac{\alpha\pi}{2}$ et sa valeur est comprise

entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$.

Pour les hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$), l'argument tend vers $-\frac{(\alpha+1)\pi}{2}$ et il est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$.

Par conséquent, les asymptotes de la boucle ouverte sont présentées dans la figure (1.10).

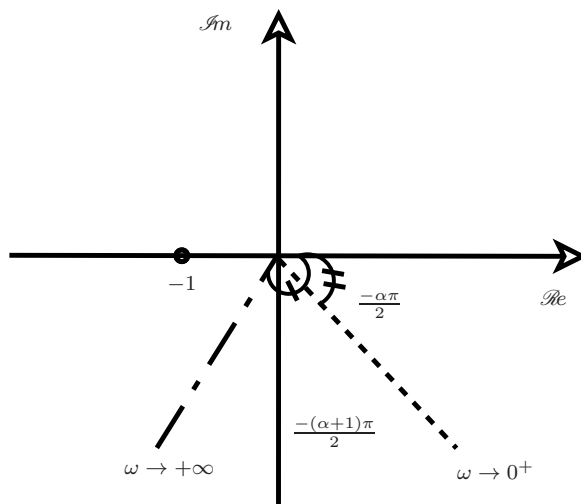


Figure 1.10 – Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$.

Quant au gain de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$, il est infini en basses fréquences à cause de la présence de l'intégration pure, et il tend vers zéros pour les hautes fréquences. Le lieu de Nyquist et Nyquist généralisé de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ sont donnés par la figure (1.11).

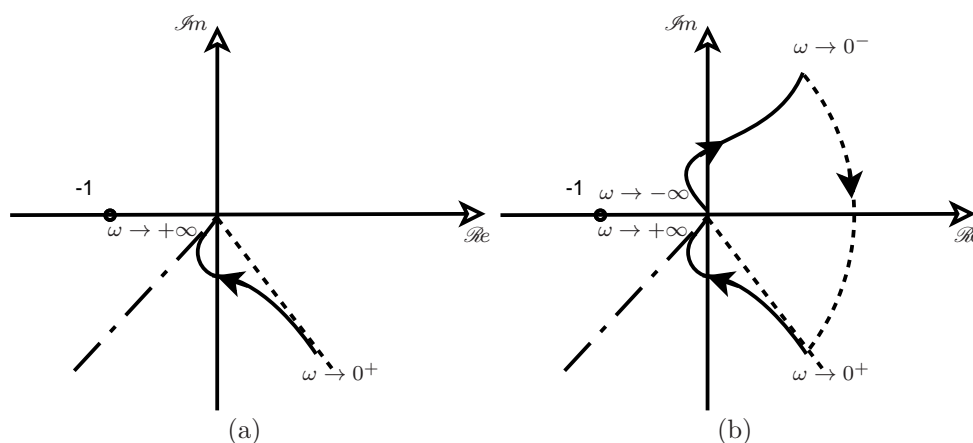


Figure 1.11 – Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$.

La stabilité du système en boucle fermée est traitée à travers le critère de Nyquist. Ce critère indique que le nombre Z de pôles instables en boucle fermée est égal à la somme du nombre N de tours de lieu de Nyquist autour du point critique $(-1, j0)$ et le nombre P de

pôles instables non nuls en boucle ouverte : $Z = P + N$ [Nyquist, 1932, Whiteley, 1947]. Le système en boucle ouverte $\beta(j\omega)$ n'a pas de pôles instables non nuls ($P = 0$) et Nyquist généralisé n'entoure pas le point critique ($N = 0$) alors le nombre Z de pôle instable de la boucle fermée est nul ($Z = 0$). D'où le système de seconde espèce non commensurable (1.121) est stable. ■

Proposition 1.2 Si $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$, alors le système de seconde espèce non commensurable est stable ssi

$$\frac{-2^{\alpha+1}\xi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\left(-\xi \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^\alpha < 1. \quad (1.127)$$

Démonstration 1.3 Pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$, l'argument de la boucle ouverte est décrit par

$$\arg(\beta(j\omega)) = \frac{-(\alpha+2)\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right). \quad (1.128)$$

Pour les basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$), l'argument tend vers $-\frac{(\alpha+2)\pi}{2}$ et il est compris entre $-\pi$ et $-\frac{3\pi}{2}$. Pour les hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$) l'argument tend vers $-\frac{(\alpha+1)\pi}{2}$ et sa valeur est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$. Ainsi, les asymptotes de la boucle ouverte dans le plan complexe sont données dans la figure (1.12).

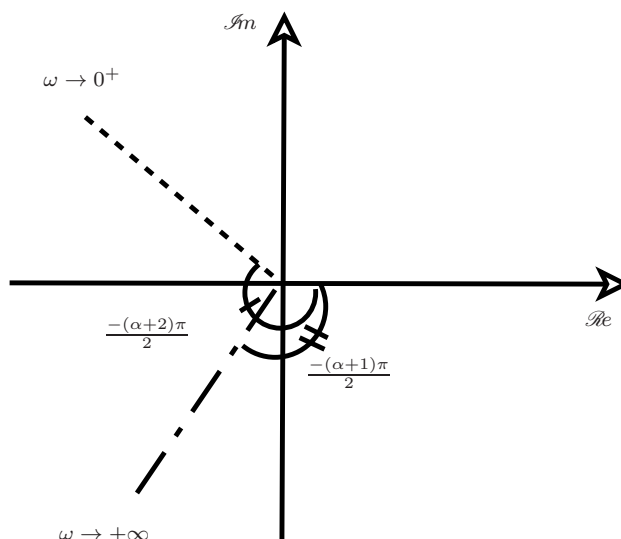


Figure 1.12 – Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$.

Là aussi, le gain de la boucle ouverte est infini en basses fréquences et tend vers zéros en hautes fréquences.

Selon la variation du gain et la phase en moyennes fréquences au voisinage du point critique -1 , deux cas de lieu de Nyquist et Nyquist généralisé se distinguent (figures (1.13) et (1.14)).

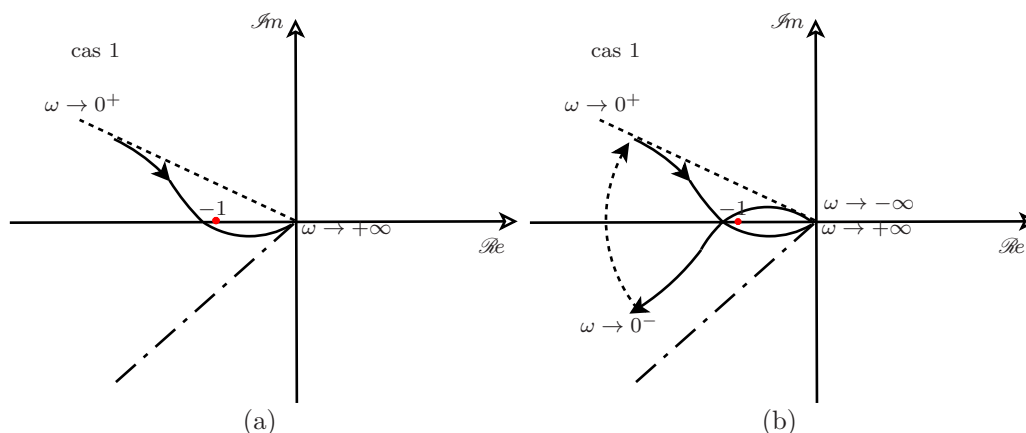


Figure 1.13 – Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$.

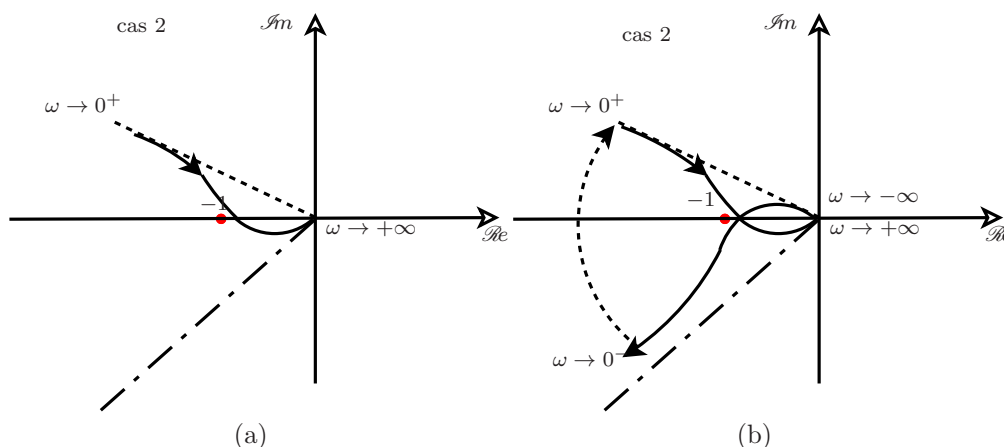


Figure 1.14 – Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$.

Pour le premier cas (figure 1.13), Nyquist généralisé entoure une fois le point critique dans le sens anti-horaire ($N = -1$). Mais, dans le second cas (figure 1.14) il entoure une fois le point critique dans le sens horaire ($N = 1$). De plus, le système en boucle ouverte admet un pôle instable non nul ($P = 1$) pour $\xi < 0$. Donc, d'après le critère de Nyquist, le système de seconde espèce non commensurable (1.121) est stable pour le premier cas (figure 1.13) et instable pour le second (figure 1.14).

Pour élaborer la condition de stabilité, le critère de Nyquist est utilisé. Ainsi, le système

est stable lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\Re(\beta(j\omega)) = -1 \quad \text{et} \quad \Im(\beta(j\omega)) < 0, \quad (1.129)$$

ou

$$\Im(\beta(j\omega)) = 0 \quad \text{et} \quad \Re(\beta(j\omega)) < -1. \quad (1.130)$$

La pulsation ω^* pour laquelle $\Im(\beta(j\omega)) = 0$ est

$$\omega^* = -2\xi\omega_n \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (1.131)$$

A partir de la condition de stabilité (1.130), on peut conclure que le système de seconde espèce non commensurable (1.121) est stable ssi

$$\frac{-2^{\alpha+1}\xi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(-\xi \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^\alpha < 1. \quad (1.132)$$

■

Proposition 1.3 Si $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$, alors le système de seconde espèce non commensurable est stable ssi

$$4\xi^2\omega_n^2\omega_u^{2\alpha} + \omega_u^{2\alpha+2} - \omega_n^{2\alpha+2} > 0, \quad (1.133)$$

$$\text{avec } \omega_u = 2\xi\omega_n \tan\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right).$$

Démonstration 1.4 Pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$, l'argument de la boucle ouverte est décrite par

$$\arg(\beta(j\omega)) = \frac{-\alpha\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right). \quad (1.134)$$

À partir de l'équation (1.134), on peut déduire que pour les basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$) l'argument tend vers $-\frac{\alpha\pi}{2}$ et sa valeur est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$. Pour les hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$) l'argument tend vers $-(\alpha+1)\frac{\pi}{2}$ et il est compris entre $-\pi$ et $-\frac{3\pi}{2}$. Par conséquent, les asymptotes de la boucle ouverte sont présentées dans le plan complexe par la figure (1.15).

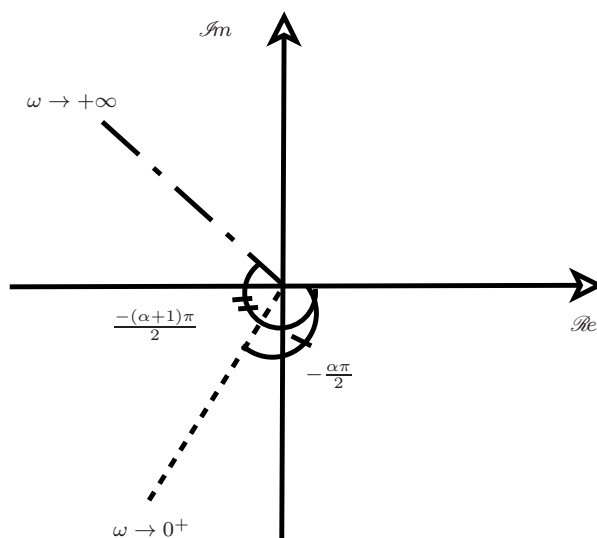


Figure 1.15 – Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$.

Là aussi, le gain de la boucle ouverte est infini en basses fréquences et tend vers zéros en hautes fréquences. Selon la variation du gain et de la phase de la boucle ouverte en moyennes fréquences au voisinage du point critique -1 , deux cas de lieu de Nyquist et Nyquist généralisé se distinguent (figures (1.16) et (1.17)).

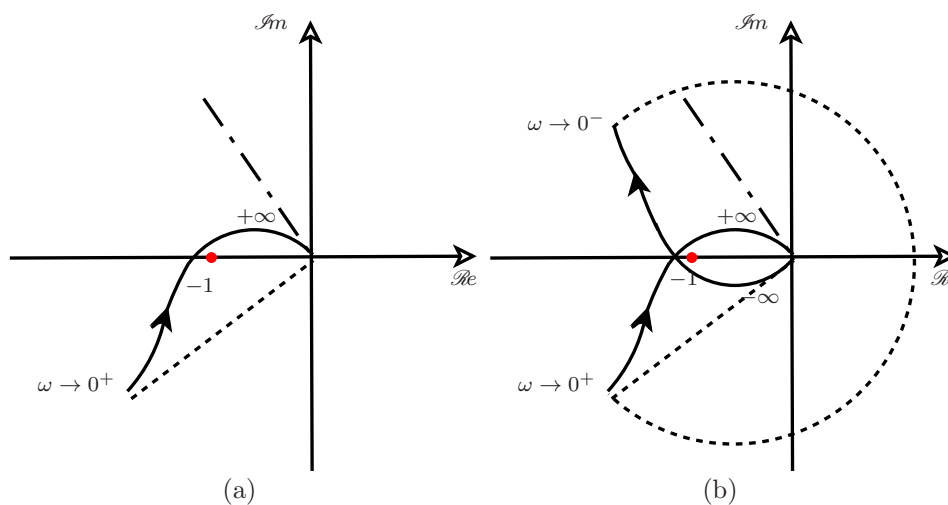


Figure 1.16 – Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$.

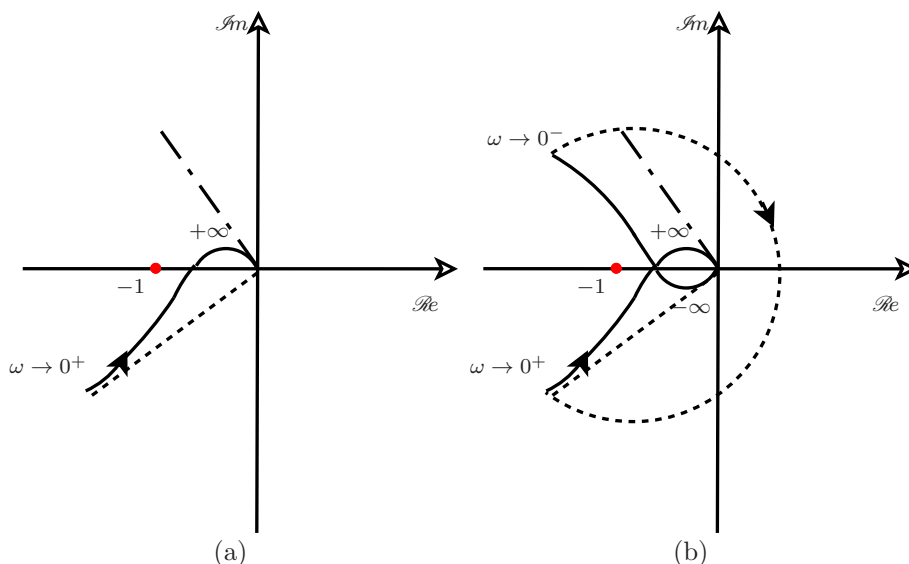


Figure 1.17 – Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 < \alpha < 2$ et $\xi > 0$.

Pour le premier cas, Nyquist généralisé entoure deux fois le point critique $(-1, j0)$ dans le sens horaire ($N = 2$). Mais pour le second cas, Nyquist généralisé n'entoure pas le point critique ($N = 0$). Comme $\beta(j\omega)$ n'admet pas des pôles instables non nuls ($P = 0$) et d'après le critère de Nyquist, le système (1.121) est instable pour le premier cas et stable pour le second ($Z = 0$). En se basant sur le critère simplifié de Nyquist, le système de seconde espèce non commensurable est stable si la phase de $\beta(j\omega)$ à la fréquence ω_u au gain unité est supérieur à $-\pi$, soit :

$$\frac{-\alpha\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_u}{2\xi\omega_n}\right) > -\pi. \quad (1.135)$$

Le module de la boucle ouverte à ω_u est donné par

$$|\beta(j\omega_u)| = \frac{\omega_n^{\alpha+1}}{\sqrt{4\xi^2\omega_n^2\omega_u^{2\alpha} + \omega_u^{2\alpha+2}}}. \quad (1.136)$$

Alors, la fréquence ω_u est la solution de l'équation

$$4\xi^2\omega_n^2\omega_u^{2\alpha} + \omega_u^{2\alpha+2} - \omega_n^{2\alpha+2} = 0. \quad (1.137)$$

D'après les équations (1.135) et (1.137), le système de seconde espèce non commensurable

est stable si la condition suivante est satisfaite

$$4\xi^2\omega_n^2\omega_u^{2\alpha} + \omega_u^{2\alpha+2} - \omega_n^{2\alpha+2} > 0, \quad (1.138)$$

avec $\omega_u = 2\xi\omega_n \tan\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right)$.

■

Théorème 1.5 (Théorème de stabilité) [Ben Hmed et al., 2015] *Le système de seconde espèce non commensurable est stable ssi l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- $0 < \alpha \leq 1$ et $\xi \geq 0$;
- $0 < \alpha < 1$, $\xi < 0$ et $\frac{-2^{\alpha+1}\xi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(-\xi \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^\alpha < 1$;
- $1 < \alpha < 2$, $\xi > 0$ et $4\xi^2\omega_n^2\omega_u^{2\alpha} + \omega_u^{2\alpha+2} - \omega_n^{2\alpha+2} > 0$ avec $\omega_u = 2\xi\omega_n \tan\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right)$.

Démonstration 1.5 *Les conditions de stabilité sont déjà vérifiées. Pour compléter la démonstration, un raisonnement par l'absurde est effectué en supposant qu'aucune de ces conditions est satisfaite c-à-d $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$ ou $\alpha \geq 2$.*

- Si $\alpha \geq 2$, alors l'argument de la boucle ouverte est donné par

$$\arg(\beta(j\omega)) = \frac{-\alpha\pi}{2} - \arg(j\omega + 2\xi\omega_n). \quad (1.139)$$

Puisque on a $\frac{-\pi\alpha}{2} \leq -\pi$ alors quelle que soit la valeur de ξ , le système de seconde espèce non commensurable est instable.

- Si $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$, alors l'argument de la boucle ouverte est décrit par

$$\arg(\beta(j\omega)) = \frac{-(\alpha+2)}{2}\pi - \arctan\left(\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right). \quad (1.140)$$

D'après l'équation (1.140), on constate que pour les basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$) la phase tend vers $\frac{-(\alpha+2)\pi}{2}$ et sa valeur est comprise entre $\frac{-3\pi}{2}$ et -2π . Pour les hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$) l'argument tend vers $-\frac{(\alpha+1)\pi}{2}$ et il est compris entre $-\pi$ et $\frac{-3\pi}{2}$. De ce fait, les asymptotes de la boucle ouverte sont présentées dans le plan complexe par la figure (1.18).

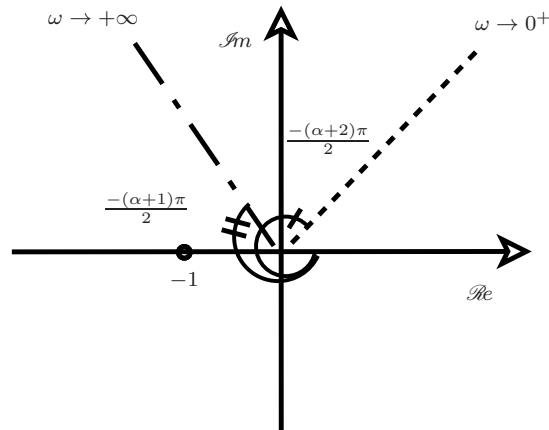


Figure 1.18 – Asymptotes de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$.

Là aussi, le gain de la boucle ouverte est infini en basses fréquences et tend vers zéros en hautes fréquences. Selon la variation du gain et de la phase de la boucle ouverte en moyennes fréquences au voisinage du point critique -1 , deux cas de lieu de Nyquist et Nyquist généralisé se distinguent (figures (1.19) et (1.20)).

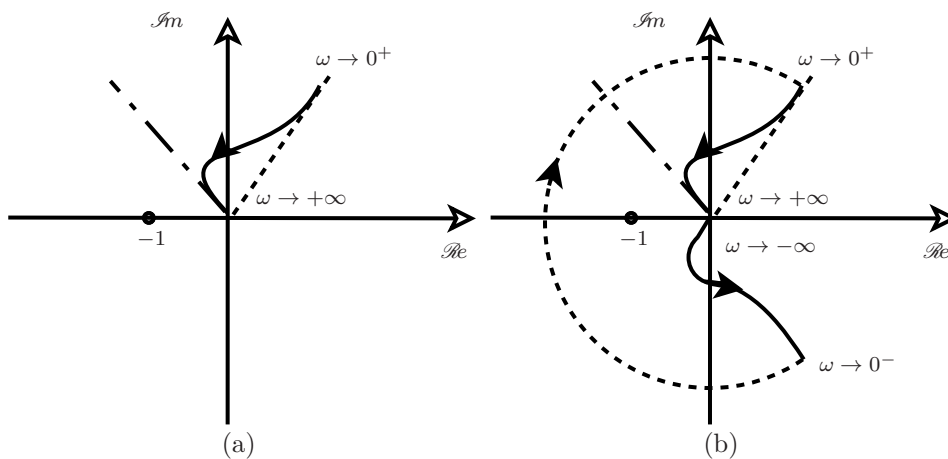


Figure 1.19 – Premier cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$.

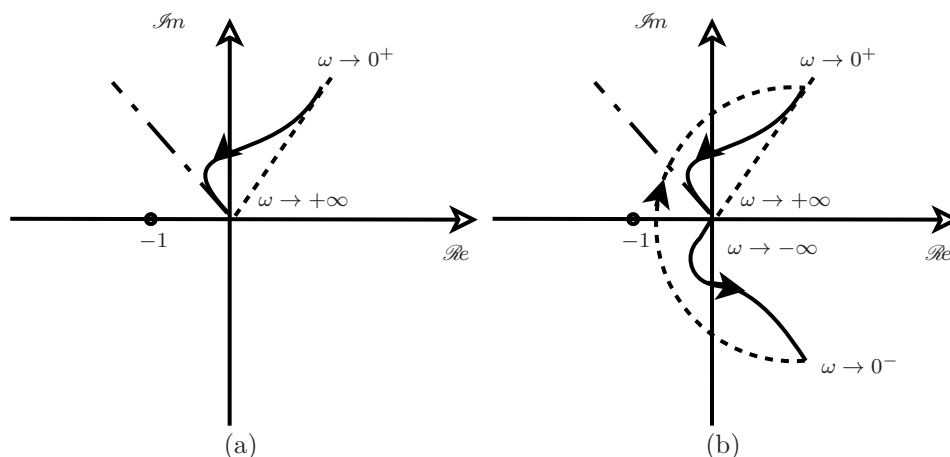


Figure 1.20 – Second cas : Lieu de Nyquist (a) et Nyquist généralisé (b) de la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi \leq 0$.

Dans le premier cas, Nyquist généralisé entoure une seule fois le point critique $(-1, j0)$ dans le sens horaire ($N = 1$). Cependant, dans le second cas, Nyquist généralisé n'entoure pas le point critique ($N = 0$). Comme la boucle ouverte $\beta(j\omega)$ admet un pôle instable non nul ($P = 1$) et d'après le critère de Nyquist, le système de seconde espèce non commensurable est instable pour les deux cas ($Z \neq 0$).

■

En utilisant cette analyse, un algorithme simple est développé pour tester la stabilité. Ainsi, la limite de stabilité est déterminée numériquement et tracée sur la figure (1.21).

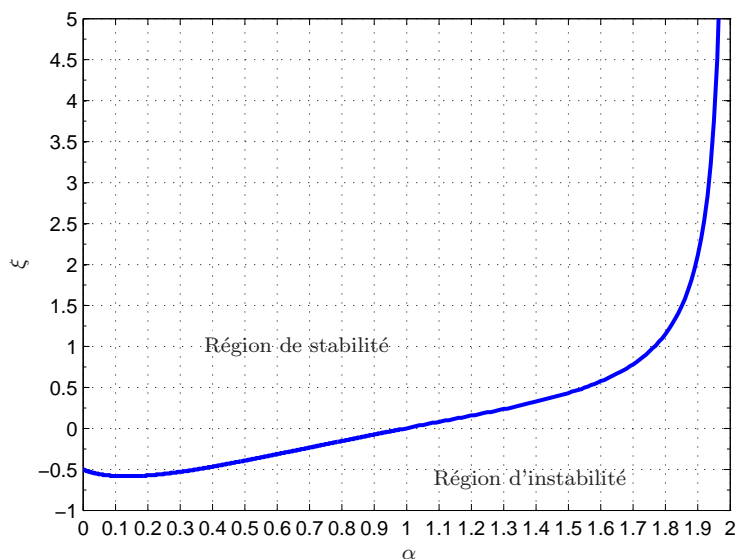


Figure 1.21 – Régions de stabilité et d'instabilité d'un système de seconde espèce non commensurable.

Dans la suite, l'ensemble des fonctions de transfert est considéré pour vérifier les résultats obtenus :

$$F_i(p) = \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega}\right)^{\alpha_i+1} + 2\xi_i\left(\frac{1}{j\omega}\right)^{\alpha_i} + 1}; \quad i = 1\dots 3 \quad (1.141)$$

L'ordre de dérivation α_i et le pseudo-facteur d'amortissement ξ_i de chaque fonction sont donnés dans le tableau (1.1).

Tableau 1.1 – Paramètres α_i et ξ_i de chaque fonction F_i .

i	ξ_i	α_i
1	0.4	0.4
2	-0.4	0.4
3	1	1.5

En appliquant le théorème (1.5) :

- Pour $i = 1$, la première condition du théorème est vérifiée et donc F_1 est stable.
- Pour $i = 2$, $0 < \alpha_2 < 1$ et $\xi_2 < 0$, il convient de comparer le terme $\frac{-2^{\alpha_2+1}\xi_2}{\cos\left(\frac{\alpha_2\pi}{2}\right)}\left(-\xi_2 \tan\left(\frac{\alpha_2\pi}{2}\right)\right)^{\alpha_2}$ à 1. Ce terme est inférieur à 1 et donc F_2 est stable.
- Pour $i = 3$, $1 < \alpha_3 < 2$ et $\xi_3 > 0$, la troisième condition du théorème est analysée. La positivité du terme $4\xi_3^2\omega_u^{2\alpha_3} + \omega_u^{2\alpha_3+2} - 1$ avec $\omega_u = 2\xi_3 \tan\left(\frac{(2-\alpha_3)\pi}{2}\right)$ est vérifiée donc F_3 est stable.

Ces mêmes résultats peuvent être vérifiés directement avec la figure (1.21). La figure (1.22) reprend les régions de stabilité avec l'emplacement de chaque fonction de transfert F_1 , F_2 et F_3 .

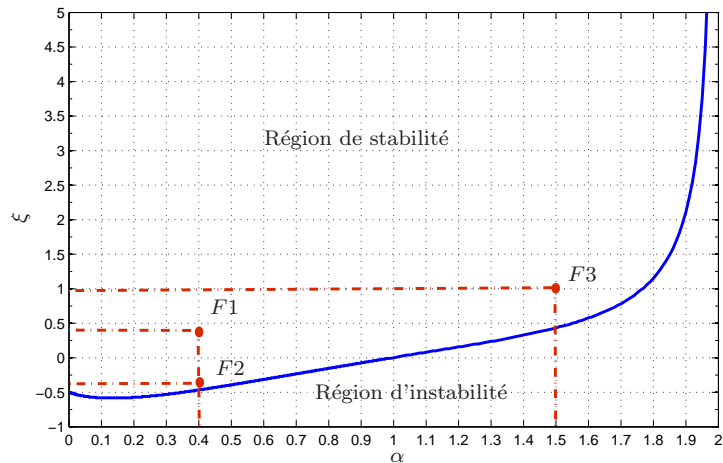


Figure 1.22 – Emplacement de F_1 , F_2 et F_3 dans les régions de stabilité et d'instabilité.

1.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux notions de base concernant les systèmes non entiers. Quelques terminologies, notions et mots clés utilisés sont définis. Les différentes définitions des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière ainsi que les différentes méthodes de représentation des systèmes non entiers sont introduites.

Les systèmes de référence généralisant le système de premier et de second ordre aux systèmes non entiers sont proposés dans ce chapitre. Une analyse approfondie sur la stabilité de ces systèmes est effectuée. La contribution présentée dans ce chapitre est l'étude des conditions de stabilité du système de seconde espèce non commensurable en fonction de pseudo-facteur d'amortissement et de l'ordre non entier.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude temporelle et fréquentielle des systèmes élémentaires d'ordre non entier.

Chapitre 2

Analyses fréquentielle et temporelle des systèmes élémentaires d'ordre non entier

Les systèmes non entiers commensurables peuvent se décomposer sur la base de deux sous-systèmes de première et de seconde espèce non entières. Ces derniers représentent respectivement la généralisation des systèmes de premier et de second ordre au cas non entier. Ils ont une importance considérable dans la littérature [Sabatier *et al.*, 2003, Vinagre *et al.*, 2002, Khemani, 2011, Malti *et al.*, 2010, Malti *et al.*, 2011].

Vu l'importance des comportements temporels et fréquentiels dans la commande et la modélisation, les principales propriétés temporelles et fréquentielles sont analysées. L'effet des paramètres des systèmes sur les différentes caractéristiques est étudié. Des règles, des conditions et des abaques sont alors établies.

2.1 Analyse fréquentielle des systèmes élémentaires d'ordre non entier

L'objectif de cette partie est d'analyser les propriétés fréquentielles des systèmes d'ordre non entier de première et de seconde espèce.

2.1.1 Résonance d'un système de première espèce

L'étude des caractéristiques fréquentielles pour le cas d'un système élémentaire non entier de première espèce fait l'objet des paragraphes suivants.

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert de première espèce est obtenue en remplaçant p par $j\omega$ telle que :

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^\alpha}. \quad (2.1)$$

Comme le gain K n'a aucune influence sur la résonance du système, il est arbitrairement fixé à 1 dans toute la suite.

Les propriétés fréquentielles du système de première espèce sont différentes de celles du système de premier ordre. En effet, le système $F(j\omega)$ peut être résonant pour des valeurs de α comme le montre la figure (2.1).

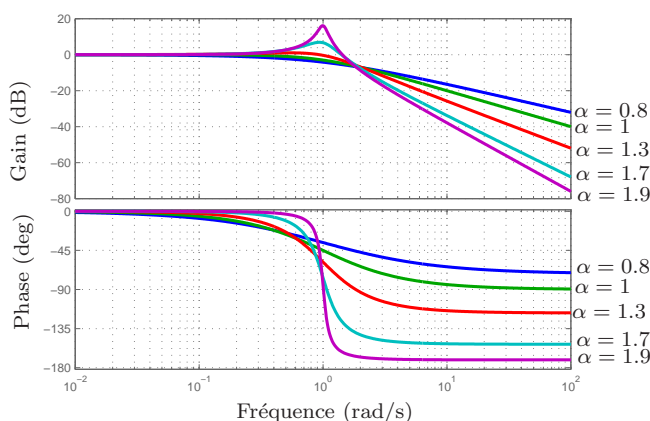


Figure 2.1 – Diagrammes de Bode d'un système non entier de première espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s et $K = 1$.

2.1.1.1 Condition de résonance

La résonance du système non entier de première espèce peut être étudiée indifféremment par une approche graphique ou analytique.

2.1.1.1.1 Approche graphique

Le système (2.1) peut être vu comme la boucle fermée de la fonction de transfert $\beta(p) = \frac{\omega_n^\alpha}{p^\alpha}$ comme le montre la figure 2.2.

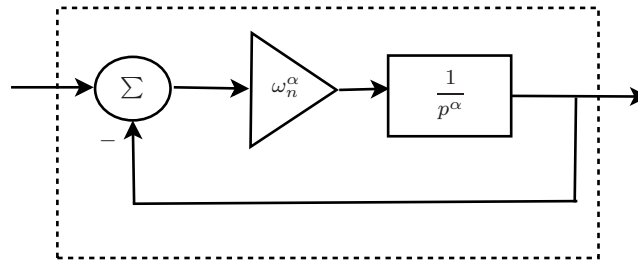


Figure 2.2 – Schéma de la boucle fermée équivalente d'un système non entier de première espèce.

Un système en boucle fermée est résonant si le lieu de Nichols de la boucle ouverte associée est situé à l'intérieur du contour 0 dB. Les diagrammes de Nichols de la boucle ouverte $\beta(p)$ de la figure (2.3) révèlent l'existence de deux cas :

- pour $\alpha \leq 1$, le lieu de Nichols est à l'extérieur du contour 0 dB, donc le système (2.1) est non résonant ;
- pour $1 < \alpha < 2$, le lieu de Nichols est à l'intérieur du contour 0 dB, donc le système (2.1) est résonant.

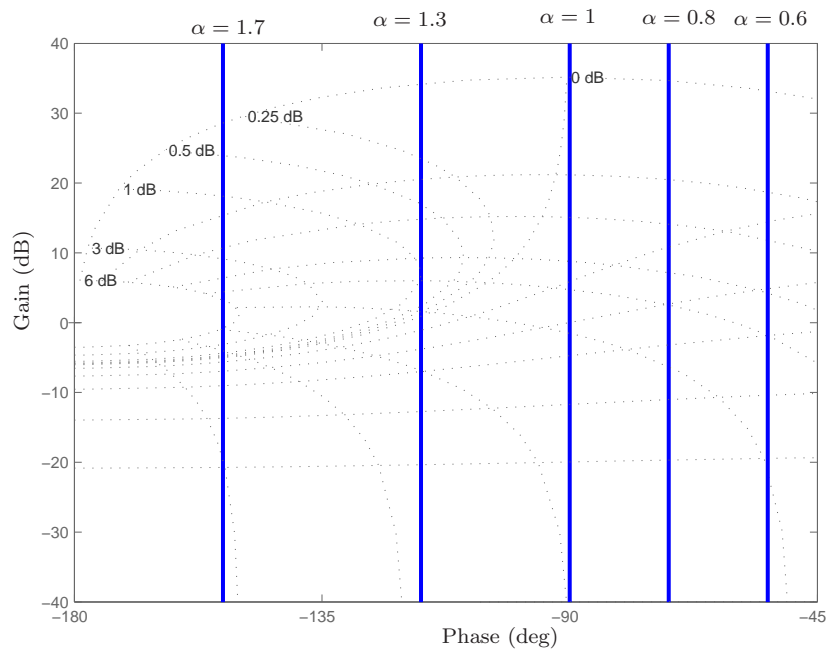


Figure 2.3 – Lieux de Nichols de $\beta(p) = \frac{\omega_n^\alpha}{p^\alpha}$ pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.

À la différence du système de premier ordre, le système de première espèce est résonant pour $1 < \alpha < 2$.

2.1.1.1.2 Approche analytique

Le gain en dB du système (2.1) est donné par

$$|F(j\Omega)|_{dB} = 20 \log(|F(j\Omega)|) = -10 \log\left(1 + 2 \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Omega^\alpha + \Omega^{2\alpha}\right) \quad (2.2)$$

et la phase par

$$\arg(F(j\Omega)) = -\arctan\left(\frac{\sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Omega^\alpha}{1 + \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Omega^\alpha}\right), \quad (2.3)$$

avec $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ est la fréquence normalisée.

Le système est dit résonant si $|F(j\Omega)|_{dB}$ admet au moins un maximum pour $\Omega > 0$. Dans ce cas, une fréquence de résonance normalisée Ω_r est une solution de l'équation

$$\left.\frac{d|F(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_r} = 2\alpha\Omega_r^{2\alpha-1} + 2\alpha \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Omega_r^{\alpha-1} = 0. \quad (2.4)$$

Dans le cas où $1 < \alpha < 2$, la seule solution obtenue est

$$\Omega_r^\alpha = -\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.5)$$

En remplaçant (2.5) dans (2.2) et (2.3), le gain en dB et la phase à la résonance sont donnés par :

$$|F(j\Omega_r)|_{dB} = -20 \log\left(\sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2.6)$$

et

$$\arg(F(j\Omega_r)) = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}. \quad (2.7)$$

2.1.2 Résonance d'un système de seconde espèce

L'étude des caractéristiques fréquentielles pour le cas d'un système élémentaire non entier de seconde espèce fait l'objet des paragraphes suivants.

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert de seconde espèce est obtenue en remplaçant p par $j\omega$ telle que

$$F(j\omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^{2\alpha} + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega)^\alpha + 1}. \quad (2.8)$$

Le gain K n'a aucune influence sur la résonance du système, il est fixé arbitrairement à 1

dans toute la suite.

Les diagrammes de Bode du système $F(j\omega)$ (figure (2.4)), montrent que les propriétés fréquentielles du système de seconde espèce sont différentes de celles du système de second ordre. En effet, selon les valeurs de α et ξ , le système non entier peut avoir deux résonances.

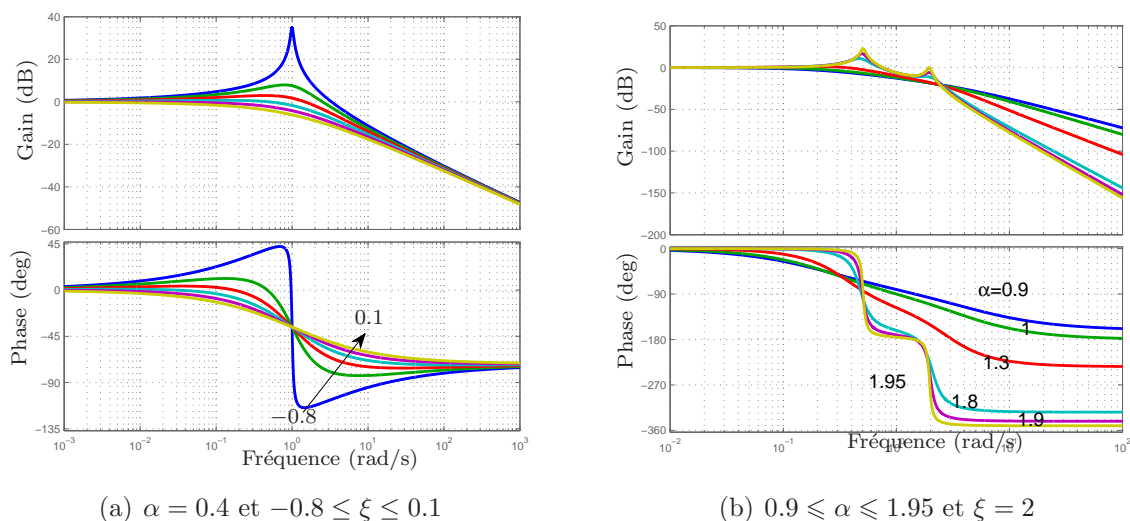


Figure 2.4 – Diagrammes de Bode d'un système non entier de seconde espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1\text{rad/s}$ et $K = 1$.

Deux comportements fréquentiels se distinguent : le premier est caractérisé par l'existence de deux fréquences de résonance pour $\xi > 1$ et $\alpha > 0.8$ [Malti *et al.*, 2010]. Le second est caractérisé par la présence d'un maximum (ou un minimum) global au voisinage de ω_n pour $\xi < 0$. Dans la suite, les comportements fréquentiels à la résonance sont étudiés.

2.1.2.1 Condition de résonance

Le système non entier de second espèce n'est pas toujours résonant comme le montre la figure (2.4). Il convient alors de déterminer la condition d'existence de résonance.

Théorème 2.1 *Le système non entier de seconde espèce (2.8) est résonant ssi*

$$\text{Min}_{\omega > 0} \left(2\omega_n^2 \omega^{2\alpha} \cos(\alpha\pi) + 4\xi\omega_n^3 \omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \omega^{4\alpha} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^{2\alpha} + 4\xi\omega_n \omega^{3\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \leq 0. \quad (2.9)$$

Démonstration 2.1 Le système non entier de seconde espèce (2.8) peut être vu comme la boucle fermée de la fonction de transfert $\beta(p) = \frac{\omega_n^2}{p^{2\alpha} + 2\xi\omega_n p^\alpha}$.

Le module de $F(j\omega)$ s'écrit :

$$|F(j\omega)| = \frac{\sqrt{\Re(\beta(j\omega))^2 + \Im(\beta(j\omega))^2}}{\sqrt{(1 + \Re(\beta(j\omega)))^2 + \Im(\beta(j\omega))^2}}, \quad (2.10)$$

avec

$$\Re(\beta(j\omega)) = \frac{\omega_n^2 \omega^{2\alpha} \cos(\alpha\pi) + 2\xi\omega_n^3 \omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega^{4\alpha} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^{2\alpha} + 4\xi\omega_n \omega^{3\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (2.11)$$

et

$$\Im(\beta(j\omega)) = -\frac{\omega_n^2 \omega^{2\alpha} \sin(\alpha\pi) + 2\xi\omega_n^3 \omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega^{4\alpha} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^{2\alpha} + 4\xi\omega_n \omega^{3\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (2.12)$$

Le système de seconde espèce est résonant si $\exists \omega > 0$ tel que $|F(j\omega)| \geq 1$ ($|F(j\omega)|_{dB} \geq 0$) ou encore

$$2\Re(\beta(j\omega)) \leq -1, \quad (2.13)$$

donc

$$2\omega_n^2 \omega^{2\alpha} \cos(\alpha\pi) + 4\xi\omega_n^3 \omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \omega^{4\alpha} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^{2\alpha} + 4\xi\omega_n \omega^{3\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \leq 0 \quad (2.14)$$

soit finalement

$$\text{Min}_{\omega>0} \left(2\omega_n^2 \omega^{2\alpha} \cos(\alpha\pi) + 4\xi\omega_n^3 \omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \omega^{4\alpha} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^{2\alpha} + 4\xi\omega_n \omega^{3\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \leq 0. \quad (2.15)$$

■

Remarque 2.1 Un test numérique montre que la pulsation propre ω_n n'influe pas sur la condition de résonance (2.9). Cependant, les seuls paramètres qui l'affectent sont le pseudo-facteur d'amortissement ξ et l'ordre non entier α . Alors, ω_n peut être fixée à $\omega_n = 1$ rad/s.

Remarque 2.2 Pour le cas particulier $\alpha = 1$, la condition de résonance (2.9) est réduite à

$$\text{Min}_{\omega>0} (\omega^4 + 2\omega_n^2 \omega^2 (2\xi^2 - 1)) \leq 0. \quad (2.16)$$

À la fréquence de résonance ω_r la relation (2.16) est donnée par

$$\omega_r^4 + 2\omega_n^2\omega_r^2(2\xi^2 - 1) \leq 0. \quad (2.17)$$

Cette dernière relation montre que le système de second ordre est résonant ssi $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La figure (2.5) révèle la limite de résonance d'un système stable de seconde espèce pour tout ω_n .

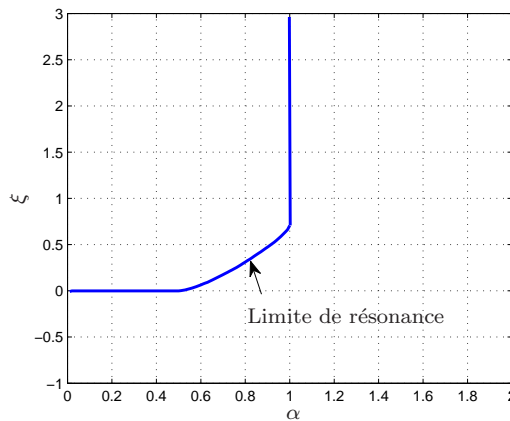


Figure 2.5 – Limite de résonance d'un système stable non entier de seconde espèce ($\forall \omega_n$).

Un système stable non entier de seconde espèce est résonant si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\alpha < 0.5$ et $\xi < 0$;
- $0.5 \leq \alpha \leq 1$ et $\xi < 13.22 \alpha^4 - 39.13\alpha^3 + 44.27\alpha^2 - 21.33\alpha + 3.663$;
- $\alpha > 1$.

Pour $0.5 \leq \alpha \leq 1$, l'expression de la limite de résonance est obtenue de façon numérique.

La figure (2.6) présente les différentes régions de stabilité et de résonance du système (2.8) [Malti *et al.*, 2010] :

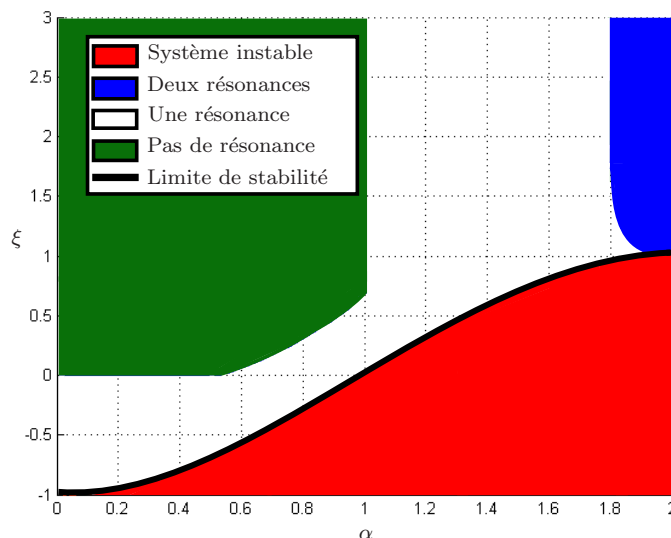


Figure 2.6 – Régions de stabilité et de résonance d'un système non entier de seconde espèce.

2.1.2.2 Abaques de résonance

La figure (2.4(b)) montre que selon le couple (α, ξ) , le système non entier de seconde espèce (2.8) peut avoir plus qu'une fréquence de résonance. Il convient de déterminer les abaques de résonance en fonction de ξ et α . Par la suite, pour chaque résonance, deux abaques du gain de résonance et de fréquence de résonance sont établis en fonction de α et ξ .

La figure (2.7) (respectivement (2.8)) présentent les abaques relatifs à la première (respectivement deuxième) résonance.

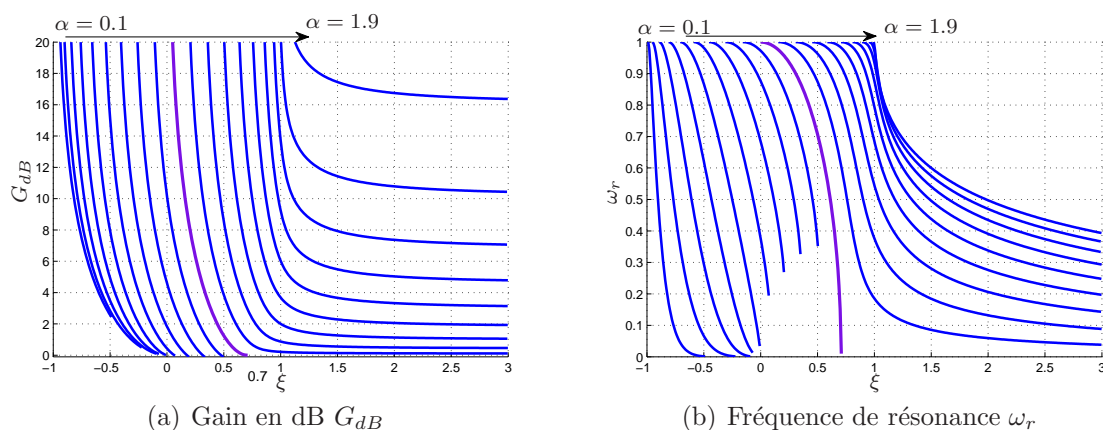
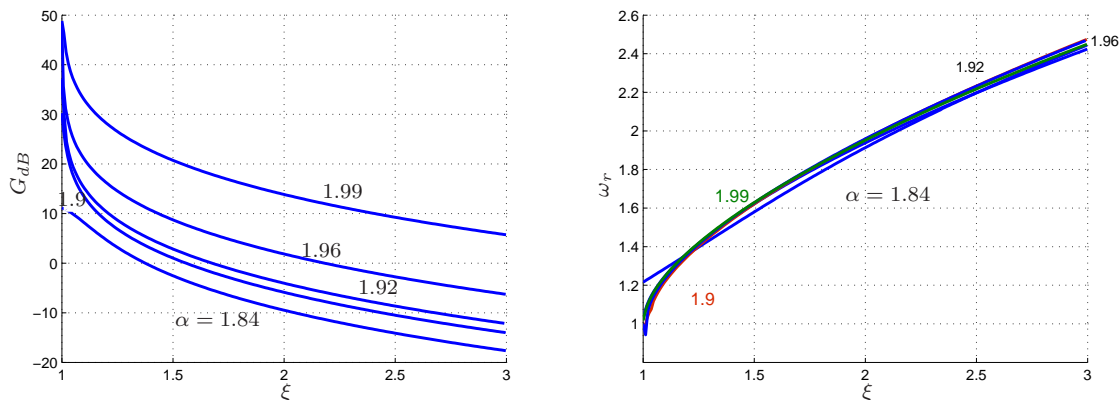


Figure 2.7 – Abaques du gain en dB et de fréquence de résonance relatifs à la première résonance.



(a) Gain en dB pour quelques valeurs de α . (b) Fréquence de résonance ω_r pour quelques valeurs de α .

Figure 2.8 – Abaqués du gain en dB et de fréquence de résonance relatifs à la deuxième résonance.

Une analyse de la phase des diagrammes de Bode de la figure (2.4(a)), révèle l'existence d'un comportement non conventionnel lorsque $\xi < 1$.

Théorème 2.2 *La phase d'un système non entier de seconde espèce stable admet un maximum et un minimum global respectivement à la fréquence ω_1 et ω_2 avec $\omega_n = (\omega_1\omega_2)^{\frac{\alpha}{2}}$ ssi $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$.*

Démonstration 2.2 *Si la phase admet un maximum et un minimum global alors $\exists \omega_1, \omega_2$ tel que $\left. \frac{d(\arg(F(j\omega)))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = \left. \frac{d(\arg(F(j\omega)))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_2} = 0$ avec*

$$\frac{d(\arg(F(j\omega)))}{d\omega} = \omega^{\alpha-1} \frac{2\alpha}{\omega_n} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left(\frac{\xi}{\omega_n^2} \omega^{2\alpha} + \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega_n^2} \omega^\alpha + \xi \right). \quad (2.18)$$

Avec le changement de variable défini par $\omega^\alpha = X$, la solution de (2.18) est celle de

$$\frac{\xi}{\omega_n^2} X^2 + \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega_n} X + \xi = 0. \quad (2.19)$$

Les solutions de l'équation (2.19) sont données par

$$X_{1,2} = \omega_n \frac{-\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \pm \sqrt{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2 - \xi^2}}{\xi}, \quad (2.20)$$

avec $X_1 X_2 = \omega_n^2$.

Or $\omega = X^{\frac{1}{\alpha}}$, les solutions en ω sont alors exprimées par

$$\omega_{1,2} = \left(\omega_n \frac{-\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \pm \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \xi^2}}{\xi} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.21)$$

avec $(\omega_1\omega_2)^{\frac{\alpha}{2}} = \omega_n$.

Dans le cas où $0 < \alpha < 1$, l'équation (2.21) donne deux valeurs positives de ω ssi $-1 < \xi < 0$. Ce sont les fréquences pour lesquelles la phase admet un minimum et un maximum global. ■

2.1.3 Résonance d'un système de seconde espèce non commensurable

L'objectif de cette partie est d'étudier les caractéristiques fréquentielles d'un système de seconde espèce non commensurable donné par

$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\alpha+1} + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\alpha} + 1}. \quad (2.22)$$

Les résultats trouvés précédemment pour le système de seconde espèce ne sont plus valables pour le système (2.22). Ainsi, la deuxième contribution de ce travail est d'étudier la résonance du système (2.22).

Le gain en dB G_{dB} et la phase φ du système (2.22) sont donnés respectivement par

$$G_{dB} = |F(j\Omega)|_{dB} = -20 \log\left(\sqrt{1 + C(\Omega)}\right), \quad (2.23)$$

$$\varphi = \arg(F(j\Omega)) = -\arctan\left(\frac{B(\Omega)}{A(\Omega)}\right), \quad (2.24)$$

où $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ est la fréquence normalisée, $A(\Omega)$, $B(\Omega)$ et $C(\Omega)$ sont donnés par

$$\begin{cases} A(\Omega) = \Omega^{\alpha+1} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + 2\xi\Omega^{\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 1 \\ B(\Omega) = \Omega^{\alpha+1} \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + 2\xi\Omega^{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ C(\Omega) = (4\xi^2 + \Omega^2) \Omega^{2\alpha} + \left(4\xi \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - 2\Omega \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) \Omega^{\alpha} \end{cases} \quad (2.25)$$

Les diagrammes de Bode du système $F(j\omega)$ (figures (2.9) et (2.10)) montrent que les propriétés fréquentielles du système non entier de seconde espèce non commensurable sont différentes de celles du système (2.8). En effet, il ne peut pas admettre deux résonances.

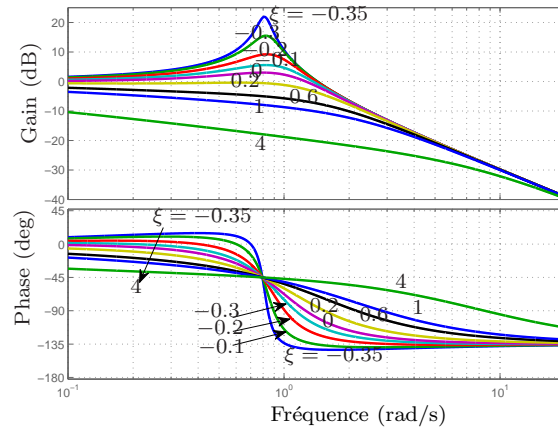


Figure 2.9 – Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 0.5$.

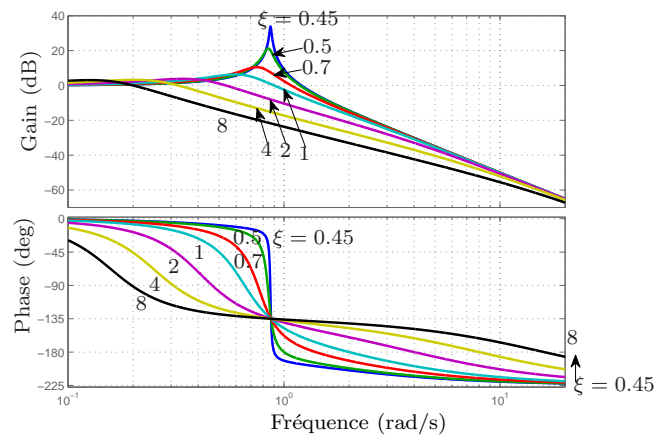


Figure 2.10 – Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 1.5$.

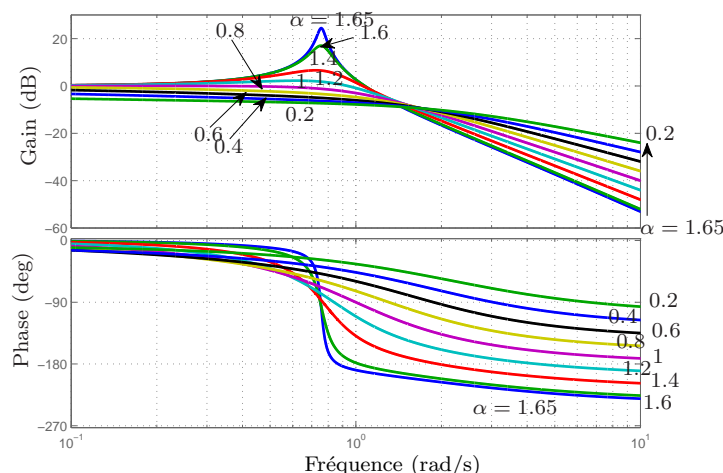


Figure 2.11 – Diagrammes de Bode d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de α avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les Diagrammes de Bode présentés par la figure (2.9) montrent que le système (2.22) est résonant avec une fréquence de résonance ω_r presque constante pour $\xi < 0$. Cependant, les diagrammes de Bode donnés par la figure (2.10), indiquent que le système est toujours résonant pour $\alpha = 1.5$. Dans le cas où $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, le système est résonant seulement pour $\alpha > 1$ (figure (2.11)).

Comme le système non entier de second espèce non commensurable n'est pas toujours résonant, il convient alors de déterminer la condition de résonance.

2.1.3.1 Condition de résonance

Le système de seconde espèce non commensurable est résonant si son module $|F(j\omega)|$ a un ou plusieurs maximums aux fréquences strictement positives. Puisque le maximum de $|F(j\omega)|$ correspond au maximum de $|F(j\Omega)|_{dB}$, les fréquences de résonance normalisées Ω_r sont solutions de l'équation

$$\frac{d|F(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega} = 8\alpha\xi^2\Omega^{2\alpha-1} + 4\alpha\xi\Omega^{\alpha-1} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 2(\alpha+1)\Omega^{2\alpha+1} - 2(\alpha+1)\Omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.26)$$

Le système est résonant si la solution réelle et strictement positive Ω_r correspond au maximum de $|F(j\omega)|$. Ainsi, le nombre des fréquences à la résonance est donné par le

nombre de Ω_r solutions de

$$f(\Omega) = 4\alpha\xi^2\Omega^{\alpha-1} + \frac{2\alpha\xi}{\Omega} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\alpha+1)\Omega^{\alpha+1} - (\alpha+1)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.27)$$

Théorème 2.3 [Ben Hmed et al., 2015] *Le système de seconde espèce non commensurable est résonant ssi*

$$\text{Min}_{\omega>0} \left(\omega^{\alpha+2} + 4\xi^2\omega^\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega + 4\xi\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \leq 0. \quad (2.28)$$

Démonstration 2.3 *Le système étudié est résonant si*

$$\exists \omega > 0 \quad \text{tel que} \quad |F(j\omega)|_{dB} \geq 0. \quad (2.29)$$

Ceci est équivalent à

$$\exists \omega > 0 \quad \text{tel que} \quad |F(j\omega)| \geq 1. \quad (2.30)$$

Le système non entier de seconde espèce non commensurable (2.22) peut s'écrire comme la boucle fermée de la fonction de transfert $\beta(p) = \frac{\omega_n^{\alpha+1}}{p^{\alpha+1} + 2\xi\omega_n p^\alpha}$.

Ainsi, le module de $F(j\omega)$ s'écrit comme suit

$$|F(j\omega)| = \frac{\sqrt{\Re(\omega)^2 + \Im(\omega)^2}}{\sqrt{(1 + \Re(\omega))^2 + \Im(\omega)^2}} \geq 1, \quad (2.31)$$

avec $\Re(\omega)$ et $\Im(\omega)$ sont respectivement donnés par

$$\Re(\omega) = \frac{\omega_n^{\alpha+1} \left(2\xi\omega_n \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \omega \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)}{4\xi^2\omega_n^2\omega^\alpha + \omega^{\alpha+2}} \quad (2.32)$$

et

$$\Im(\omega) = \frac{-\omega_n^{\alpha+1} \left(\omega \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 2\xi\omega_n \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)}{4\xi^2\omega_n^2\omega^\alpha + \omega^{\alpha+2}}. \quad (2.33)$$

Alors, le système de seconde espèce non commensurable est résonant si

$$\exists \omega > 0 \quad \text{tel que} \quad 2\Re(\omega) \leq -1. \quad (2.34)$$

En utilisant (2.32), une nouvelle relation est obtenue

$$\text{Min}_{\omega>0} \left(\omega^{\alpha+2} + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^\alpha - 2\omega_n^{\alpha+1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega + 4\xi \omega_n^{\alpha+2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \leq 0. \quad (2.35)$$

Comme la relation (2.26) est exprimée en fonction de la fréquence normalisée Ω , la condition (2.35) est vérifiée $\forall \omega_n$. Les seuls paramètres qui influent sur la condition de résonance sont le pseudo-facteur d'amortissement ξ et l'ordre non entier α . De ce fait, la condition de résonance peut être établie pour $\omega_n = 1$ rad/s.

■

Pour les deux cas particuliers $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1.5$, le système étudié est résonant ssi

$$\text{Min}_{\omega>0} \left(\omega^{\alpha+2} \left(\frac{2\xi}{\omega^2} \left(\frac{-\sqrt{2}(-1)^{\alpha+0.5}}{\omega^\alpha} + 2\xi \right) - \frac{\sqrt{2}}{\omega^{1+\alpha}} + 1 \right) \right) \leq 0 \quad (2.36)$$

Lorsque $\alpha = 1$, la relation (2.28) est exprimée par $\text{Min}_{\omega>0} ((\omega^2 + (4\xi^2 - 2))\omega) \leq 0$. À la fréquence de résonance ω_r , on a $(\omega_r^2 + (4\xi^2 - 2))\omega_r \leq 0$. Cette inégalité montre que le système de second ordre est résonant ssi $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Théorème 2.4 *Le système de seconde espèce non commensurable admet une seule résonance pour $1 \leq \alpha < 2$ et $\xi > 0$.*

Démonstration 2.4 *On suppose que le système possède deux fréquences de résonance Ω_1 et Ω_2 tel que $0 < \Omega_1 \leq \Omega_2$. Étant donné que $f(\Omega_1) = f(\Omega_2) = 0$, alors on peut écrire l'équation suivante :*

$$\underbrace{4\alpha\xi^2(\Omega_2^{\alpha-1} - \Omega_1^{\alpha-1})}_{\geq 0} + \underbrace{2\alpha\xi\left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_1}\right)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(\alpha+1)(\Omega_2^{\alpha+1} - \Omega_1^{\alpha+1})}_{\geq 0} = 0$$

Ceci conduit à $\Omega_2 = \Omega_1$.

La résolution de l'équation (2.27) est difficile à obtenir analytiquement. Dès lors, un algorithme numérique simple est développé. Il teste l'existence de résonance du système en utilisant le théorème (2.3). Ainsi, pour plusieurs combinaisons de ξ et α , deux régions sont obtenues et tracées sur la figure (2.12). La première région A concerne les combinaisons

qui ne donne aucune résonance. La deuxième région B représente les valeurs de (ξ, α) qui donnent une seule résonance.

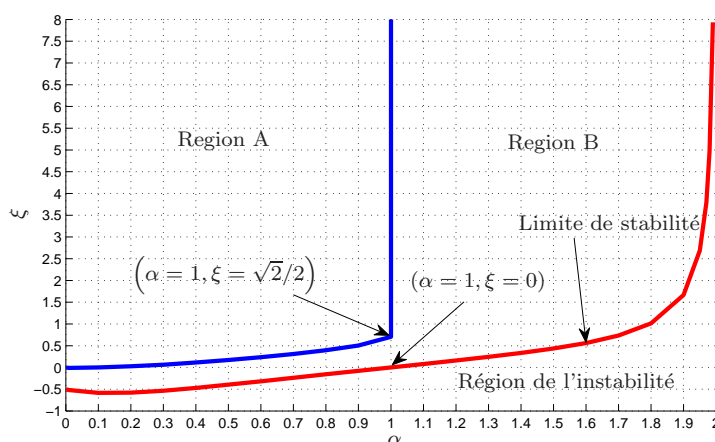


Figure 2.12 – Régions de stabilité et de résonance d'un système de seconde espèce non commensurable.

Remarque 2.3 *Contrairement au cas rationnel, le système de seconde espèce non commensurable est résonant même si le pseudo-facteur d'amortissement est négatif ou de valeur élevée comme le montre la figure (2.12).*

Pour $\xi = 0$ et $0 < \alpha \leq 1$, la seule solution strictement positive (c-à-d la fréquence de résonance) de l'équation (2.27) est donnée par $\Omega_r = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Ceci est confirmée par les régions présentées par la figure (2.12).

2.1.3.2 Abaques de résonance

Dans la suite, pour chaque résonance, trois abaques des caractéristiques fréquentielles à la fréquences normalisée sont établis en fonction de ξ et α tels que :

- Pour $0 < \alpha < 1$, les figures (2.15(a)), (2.15(b)) et (2.15(c)) présentent respectivement le gain en dB, la fréquence normalisée Ω_r et la phase à la résonance en fonction de ξ .
- Pour $1 \leq \alpha \leq 1.9$, les figures (2.16(a)), (2.16(b)) et (2.16(c)) montrent respectivement le gain en dB, la fréquence normalisée Ω_r et la phase à la résonance en fonction de ξ .
- Pour $1.9 < \alpha < 2$, les figures (2.17(a)), (2.17(b)) et (2.17(c)) décrivent respectivement le gain en dB, la fréquence normalisée Ω_r et la phase à la résonance en fonction de ξ .

Pour $1 \leq \alpha < 2$, la phase à la résonance est proportionnelle au pseudo-facteur d'amortissement pour les faibles valeurs de ξ et elle devient quasi-constante pour les valeurs élevées de ξ comme l'indique la figure (2.16(c)).

Pour montrer l'utilité de ces abaques, soient les trois fonctions de transfert suivantes :

$$F_1(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{n_1}}\right)^{\alpha_1+1} + 2\xi_1\left(\frac{p}{\omega_{n_1}}\right)^{\alpha_1} + 1}, \quad (2.37)$$

$$F_2(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{n_2}}\right)^{\alpha_2+1} + 2\xi_2\left(\frac{p}{\omega_{n_2}}\right)^{\alpha_2} + 1}, \quad (2.38)$$

$$F_3(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{n_3}}\right)^{\alpha_3+1} + 2\xi_3\left(\frac{p}{\omega_{n_3}}\right)^{\alpha_3} + 1}. \quad (2.39)$$

En exploitant les performances désirées données dans le tableau (2.1) pour un α donné, les paramètres (ξ et ω_n) sont déterminés à partir les abaques (figures (2.15), (2.16) et (2.17)).

Tableau 2.1 – Détermination des paramètres d'un système de seconde espèce non commensurable à partir des spécifications fréquentielles à la résonance.

	Performances désirées	Paramètres obtenus
$F_1(p)$	$\omega_r = 100$ rad/s $G_{dB} = 19.6$ dB $\alpha_1 = 0.45$	$\xi_1 = -0.37$ $\omega_{n_1} = 130$ rad/s $\varphi_{\omega_r} = -57^\circ$
$F_2(p)$	$\omega_r = 1000$ rad/s $G_{dB} = 7.5$ dB $\alpha_2 = 1.5$	$\xi_2 = 0.87$ $\omega_{n_2} = 1523$ rad/s $\varphi_{\omega_r} = -77^\circ$
$F_3(p)$	$\omega_r = 200$ rad/s $G_{dB} = 40$ dB $\alpha_3 = 1.97$	$\xi_3 = 4.44$ $\omega_{n_3} = 606$ rad/s $\varphi_{\omega_r} = -90^\circ$

Les diagrammes de Bode des systèmes (2.37), (2.38) et (2.39) montrent que les performances fréquentielles sont satisfaites (figures (2.13(a)), (2.13(b)) et (2.14)).

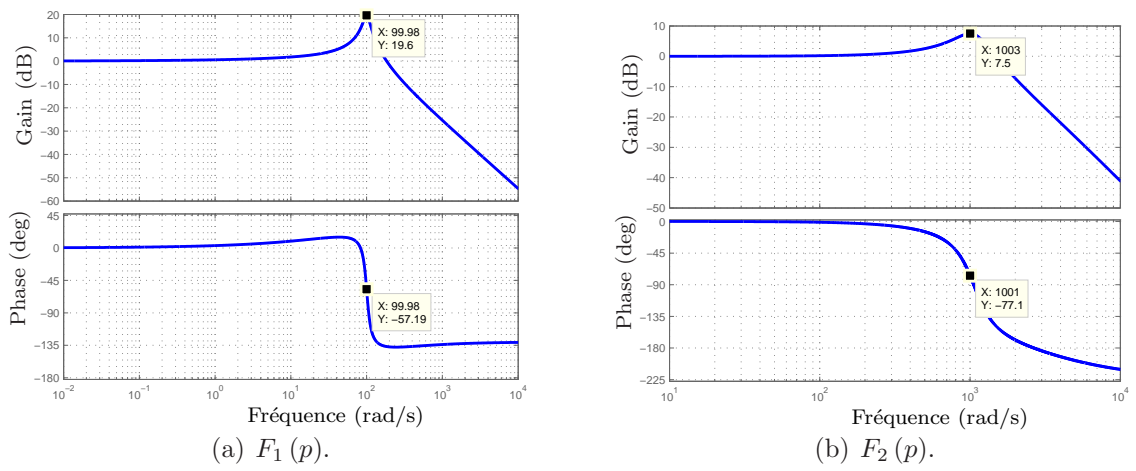


Figure 2.13 – Diagrammes de Bode des systèmes $F_1(p)$ et $F_2(p)$.

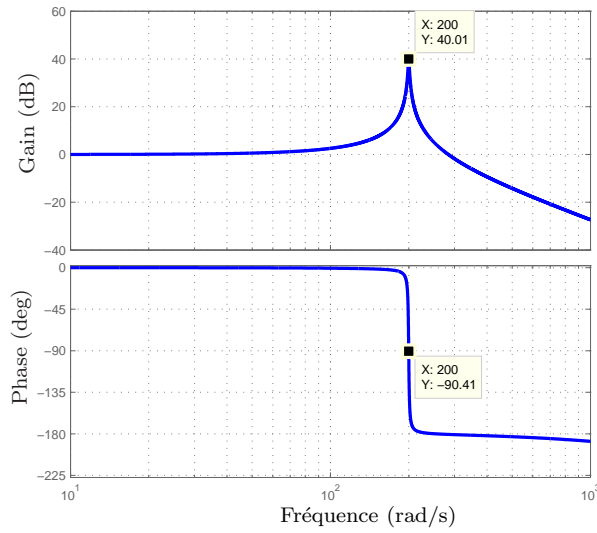
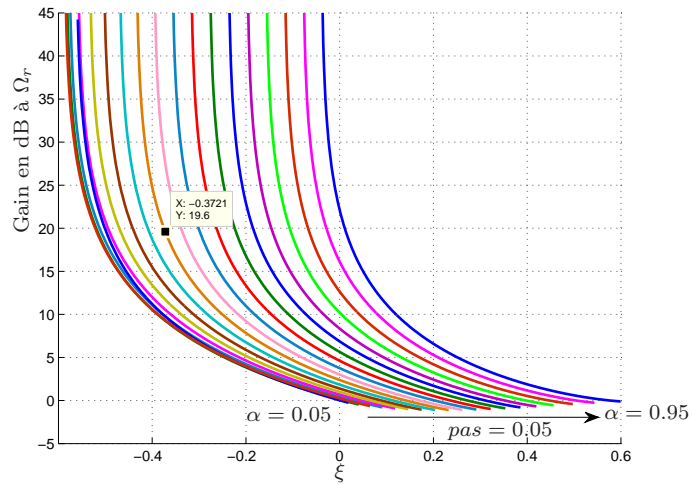
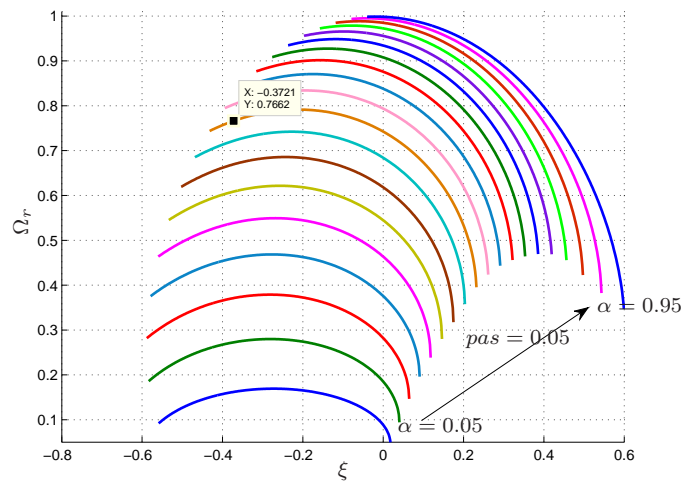


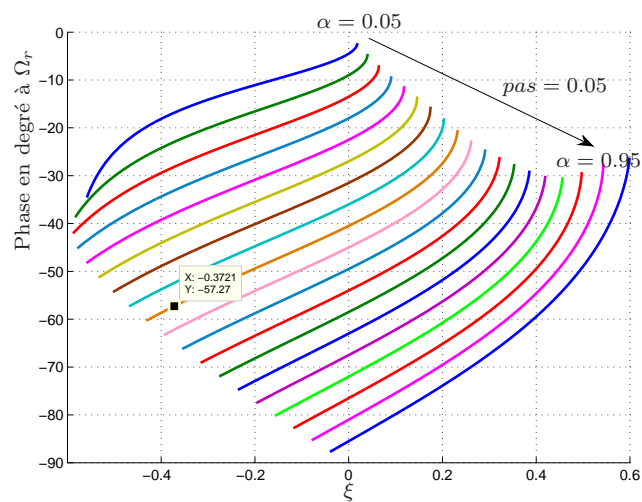
Figure 2.14 – Diagrammes de Bode du système $F_3(p)$.



(a) Gain en dB à la fréquence normalisée Ω_r en fonction de ξ .

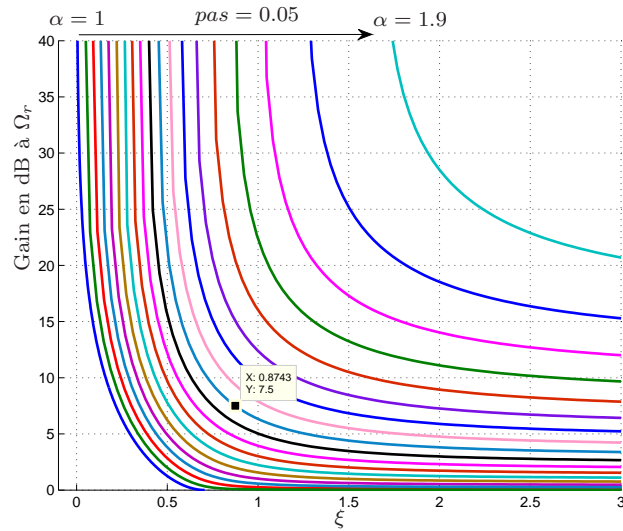


(b) Fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

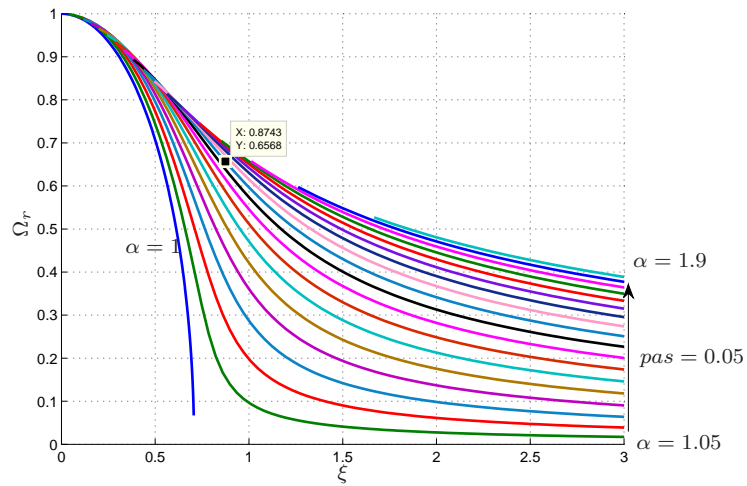


(c) Phase à la fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

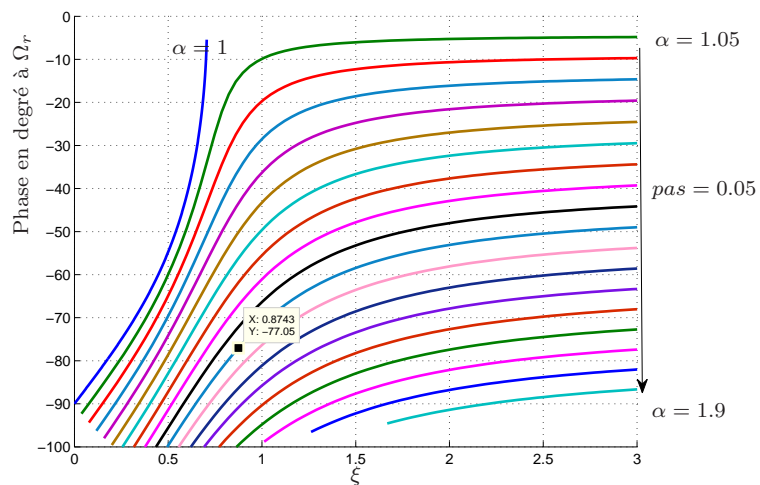
Figure 2.15 – Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de second espèce non commensurable pour $0 < \alpha < 1$.



(a) Gain en dB à la fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

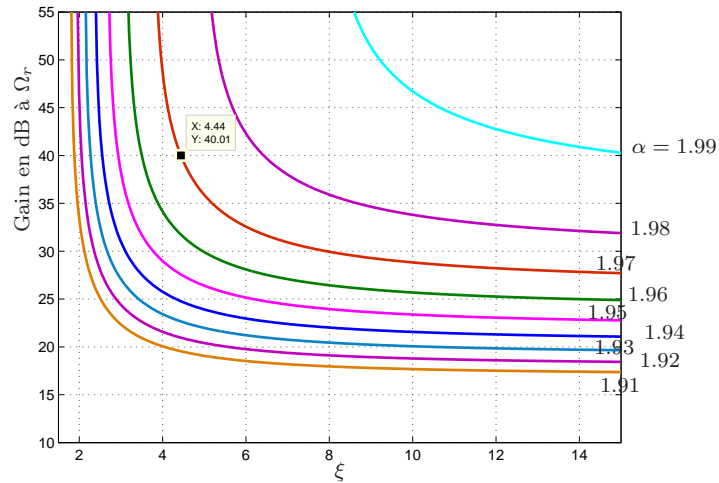


(b) Fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

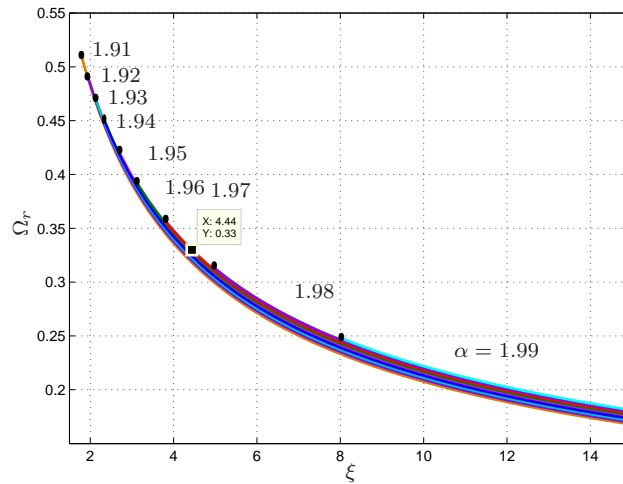


(c) Phase à la fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

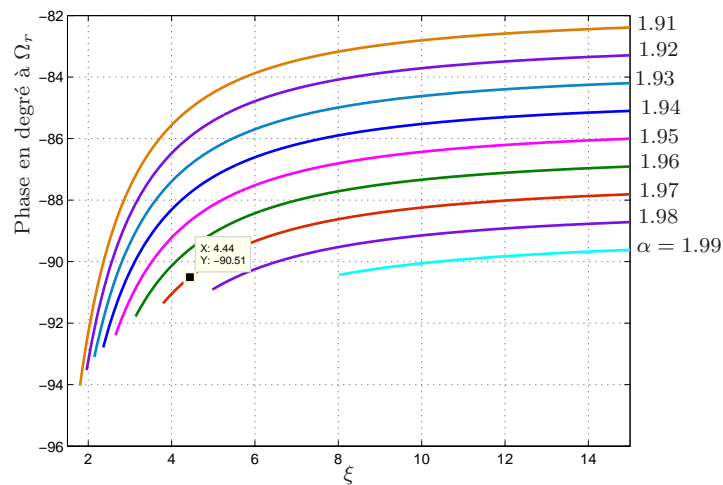
Figure 2.16 – Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de seconde espèce non commensurable pour $1 \leq \alpha \leq 1.9$.



(a) Gain en dB à la fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .



(b) Fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .



(c) Phase à la fréquence normalisée de résonance Ω_r en fonction de ξ .

Figure 2.17 – Caractéristiques fréquentielles à la résonance d'un système de seconde espèce non commensurable pour $1.9 < \alpha < 2$.

Dans cette section, la résonance des systèmes élémentaires d'ordre non entier est étudiée. Une condition de résonance est établie en terme de α et ξ . Ainsi, un algorithme simple est développé permettant de tracer la limite de résonance en fonction de α et ξ . De plus, trois abaques des caractéristiques fréquentielles sont générés pour chaque fréquence de résonance. Ces abaques peuvent être utilisés dans la modélisation des systèmes élémentaires d'ordre non entier à partir des spécifications fréquentielles désirées à savoir : le gain en dB de résonance, la phase de résonance et la fréquence de résonance.

2.2 Analyse temporelle des systèmes élémentaires d'ordre non entier

Dans la suite, l'étude des caractéristiques temporelles des systèmes élémentaires d'ordre non entier peut être effectuée indifféremment par

- l'emplacement des pôles dans le plan complexe ;
- les abaques des caractéristiques temporelles à savoir : le temps de réponse, le temps de montée et le premier dépassement.

Les systèmes élémentaires n'admettent pas toujours des pôles en p , il convient d'étudier l'effet des pôles en p^α sur les comportements du système.

2.2.1 Système élémentaire d'ordre non entier de première espèce

Cette partie est consacrée à l'étude de l'influence des pôles en p^α sur les propriétés temporelles d'un système non entier de première espèce. De plus, les abaques du temps de réponse et du premier dépassement sont établis pour différentes valeurs de α .

2.2.1.1 Effet des pôles en p^α sur les caractéristiques temporelles

Les pôles en p^α sont décrits par

$$|p^\alpha| e^{j\varphi}, \quad (2.40)$$

avec

$$|p^\alpha| = \omega_n^\alpha,$$

$$\varphi = \pi.$$

Afin d'étudier l'effet de l'emplacement des pôles en p^α sur les comportements temporels, deux cas sont considérés : $\omega_n > 1$ ($\omega_n = 2 \text{ rad/s}$) et $\omega_n < 1$ ($\omega_n = 0.5 \text{ rad/s}$). Les figures (2.18) et (2.19) illustrent l'effet des pôles p^α sur les réponses indicielles du système (2.1).

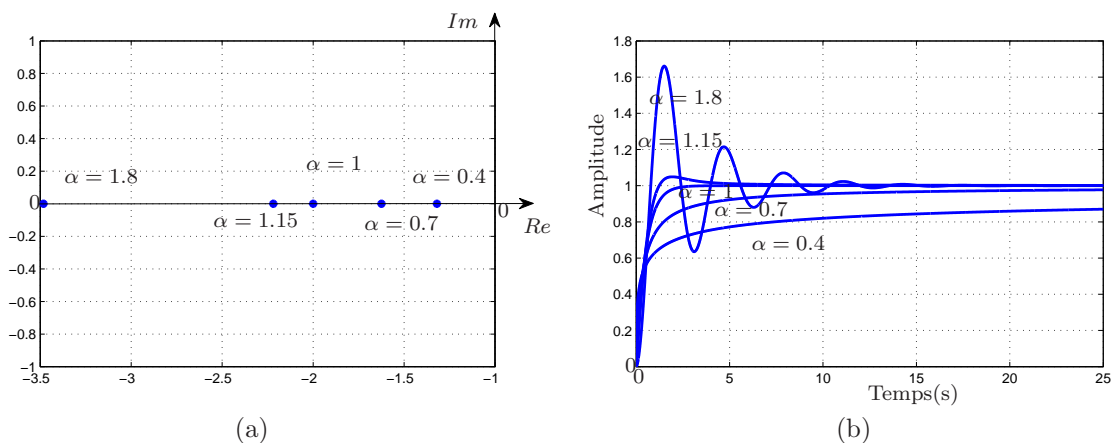


Figure 2.18 – Lieux des pôles en p^α et réponses indicielles pour $\alpha = \{0.4, 0.7, 1, 1.15, 1.8\}$ et $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$.

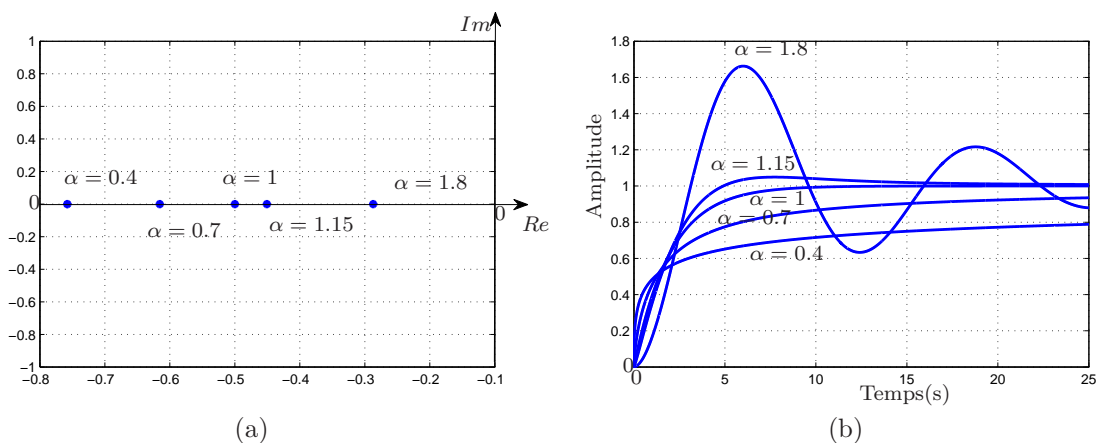


Figure 2.19 – Lieux des pôles en p^α et réponses indicielles pour $\alpha = \{0.4, 0.7, 1, 1.15, 1.8\}$ et $\omega_n = 0.5 \text{ rad/s}$.

Pour $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$ le pôle en p^α s'éloigne du demi-plan droit en augmentant α (figure (2.18(a))) et la réponse du système tend vers un comportement oscillant-amorti (figure (2.18(b))). Pour $\omega_n = 0.5 \text{ rad/s}$ le pôle en p^α se rapproche du demi-plan droit (figure

(2.19(a)) et la réponse du système tend aussi vers un comportement oscillant-amorti (figure (2.19(b))).

2.2.1.2 Abaques du premier dépassement et du temps de réponse

D'après les précédentes études, le système non entier de première espèce présente des caractéristiques temporelles totalement différentes d'un système de premier ordre. En effet, les réponses indicielles unitaires (2.18(b)) et (2.19(b)) du système (2.1) présentent trois types des comportements :

- hyper-amorti pour $0 < \alpha < 1$;
- oscillant-amorti pour $1 < \alpha < 2$;
- critique pour $\alpha = 1$.

Il s'avère alors nécessaire d'étudier deux principales caractéristiques, à savoir :

- le premier dépassement ;
- le temps de réponse à $\pm 5\%$.

La figure (2.20) présente les abaques du premier dépassement et du temps de réponse pour différentes valeurs de α .

Comme le système est hyper-amorti pour $0 < \alpha < 1$, l'abaque du premier dépassement (figure (2.20(a))) est tracé seulement pour $\alpha > 1$. Quant à l'abaque du temps de réponse (2.20(b)), il est tracé pour $\alpha \geq 0.5$. Pour des faibles valeurs de α ($\alpha < 0.5$) le temps de réponse est très grand.

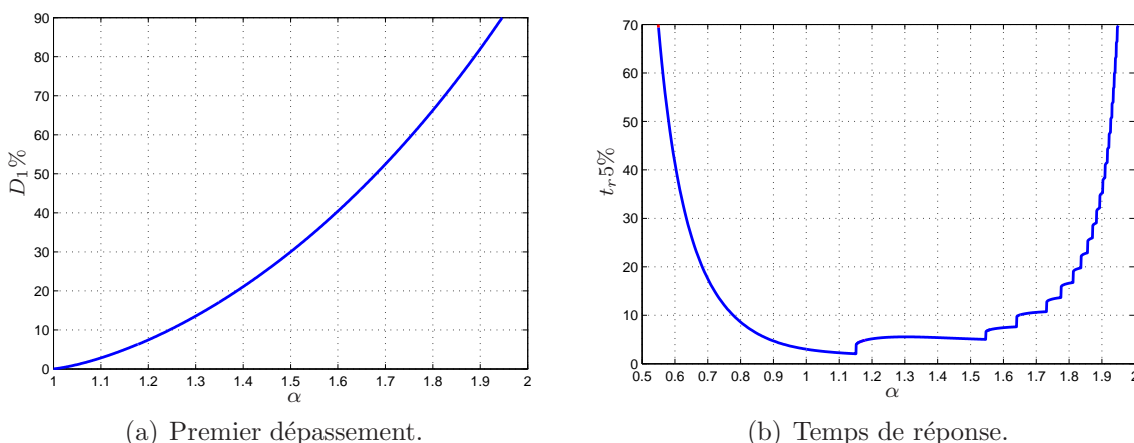


Figure 2.20 – Abaques du premier dépassement et du temps de réponse d'un système de première espèce pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s et $K = 1$.

Les abaques tracés sur la figure (2.20(b)), ne sont valables que pour un système non entier de première espèce avec $\omega_n = 1$ rad/s. Afin de généraliser l'utilisation de ces abaques

pour d'autres valeurs de ω_n , la formule suivante est utilisée

$$t_{r5\%}|_{\forall\omega_n} = \frac{t_{r5\%}|_{\omega_n=1}}{\omega_n}. \quad (2.41)$$

Cette formule est issue des résultats trouvés lors de la décomposition modale d'un système non entier d'ordre commensurable (voir section 1.4.2 pour plus des détails) [Sabatier *et al.*, 2003].

En utilisant la formule (2.41), le temps de réponse pour n'importe quelle valeur de ω_n peut être déterminé à partir de l'abaque (figure 2.20(b)). Pour vérifier la relation (2.41), deux abaques du temps de réponse sont tracés pour deux valeurs arbitraires de ω_n ($\omega_n = 1$ rad/s et $\omega_n = 2$ rad/s) (figure (2.21)).

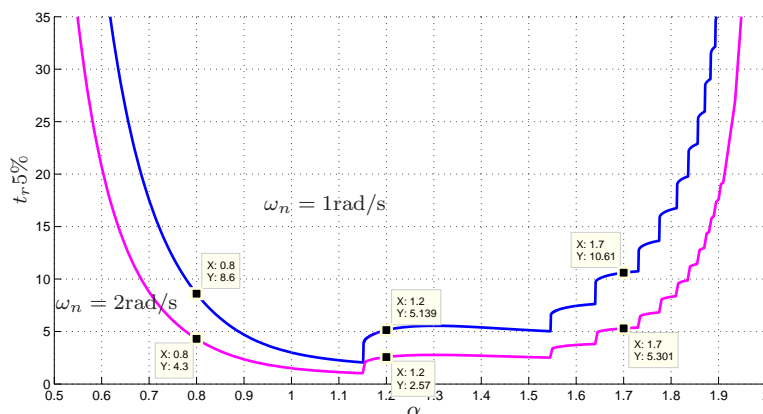


Figure 2.21 – Abaque du temps de réponse pour $\omega_n = 1$ rad/s et $\omega_n = 2$ rad/s avec $K = 1$.

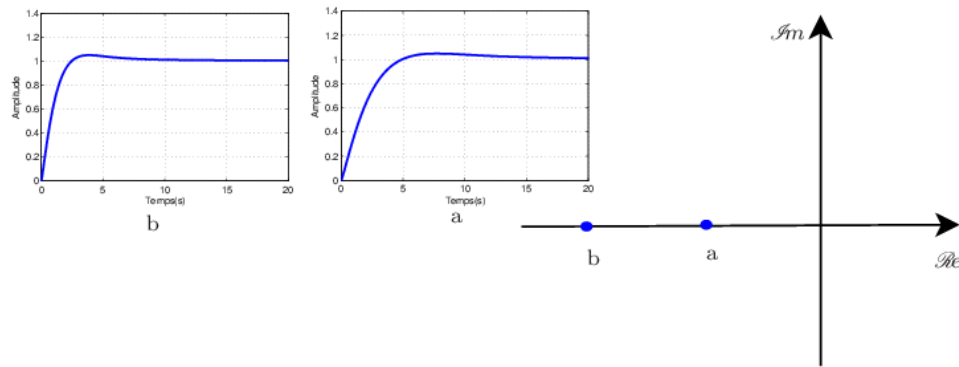
La figure (2.21) montre l'existence d'un coefficient de deux entre ces deux courbes, ce qui confirme la relation (2.41).

2.2.1.3 Ordre optimal

Le temps du réponse minimal est obtenu toujours pour $\alpha^* = 1.15$ quelle que soit la valeur de ω_n (figure (2.21)). Dans ce cas, le pôle en p^α peut être défini par

$$p^{\alpha^*} = -\omega_n^{1.15}. \quad (2.42)$$

La figure (2.22) illustre l'effet de module du pôle en p^α sur la réponse indicielle.


 Figure 2.22 – Effet de ω_n sur le pôle $p^{\alpha*}$ et la réponse indicielle.

Il convient de souligner que le module du pôle en p^α a une influence directe sur la rapidité du système. En effet, le temps de réponse diminue en augmentant le module du pôle en p^α .

2.2.2 Système élémentaire d'ordre non entier de seconde espèce

Dans cette partie, les comportements temporels d'un système non entier de seconde espèce sont étudiés à travers l'emplacement des pôles en p^α réels et complexes. Les abaques des principales propriétés temporelles à savoir le premier dépassement, le temps de réponse et le temps de montée sont déterminés en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ et l'ordre non entier α .

2.2.2.1 Effet des pôles réels en p^α sur les caractéristiques temporelles

Les pôles réels en p^α pour $|\xi| \geq 1$ sont définis par

$$p_{1,2}^\alpha = -\omega_n \xi \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (2.43)$$

L'emplacement des pôles en p^α dans le plan complexe dépend essentiellement des paramètres ω_n et ξ .

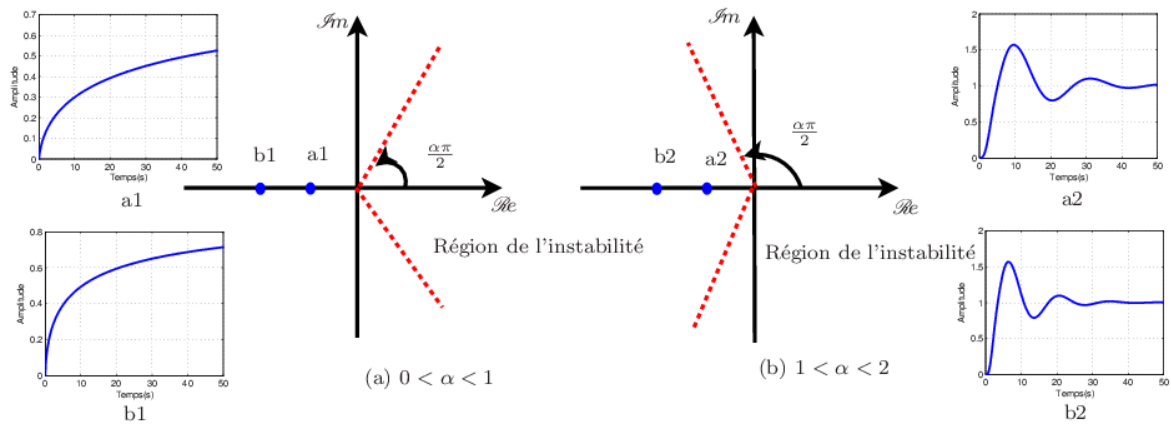


Figure 2.23 – Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $\xi > 1$.

Lorsque $\xi > 1$, le système possède deux comportements :

- pour $0 < \alpha \leq 1$, il est hyper-amorti ;
- pour $1 < \alpha < 2$, il est oscillant-amorti.

La figure (2.23) révèle que le temps de réponse du système (2.8) s'améliore en augmentant le module du pôle en p^α .

2.2.2.2 Effet des pôles complexes en p^α sur les caractéristiques temporelles

Les deux pôles en p^α pour $|\xi| < 1$ sont décrits par

$$p_{1,2}^\alpha = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (2.44)$$

où ω_n et ξ définissent respectivement le module et l'argument du pôle $p_{1,2}^\alpha$.

L'emplacement des pôles en p^α dépend essentiellement des paramètres ω_n et ξ . Ainsi, l'effet des paramètres du système de seconde espèce sur l'emplacement des pôles en p^α dans le plan complexe est illustré à travers la figure (2.24).

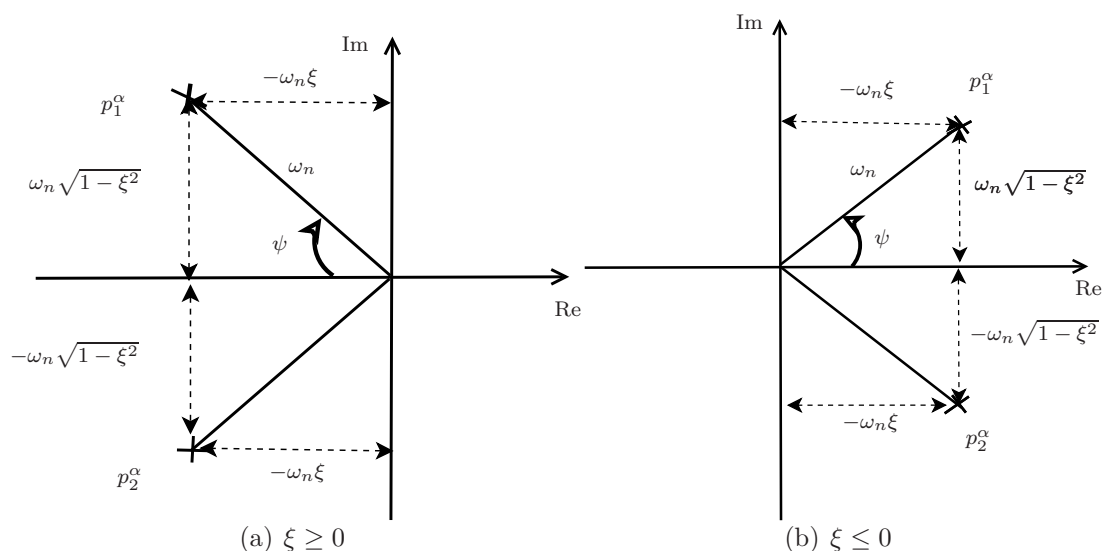


Figure 2.24 – Effet des paramètres d'un système de seconde espèce sur l'emplacement des pôles en p^α .

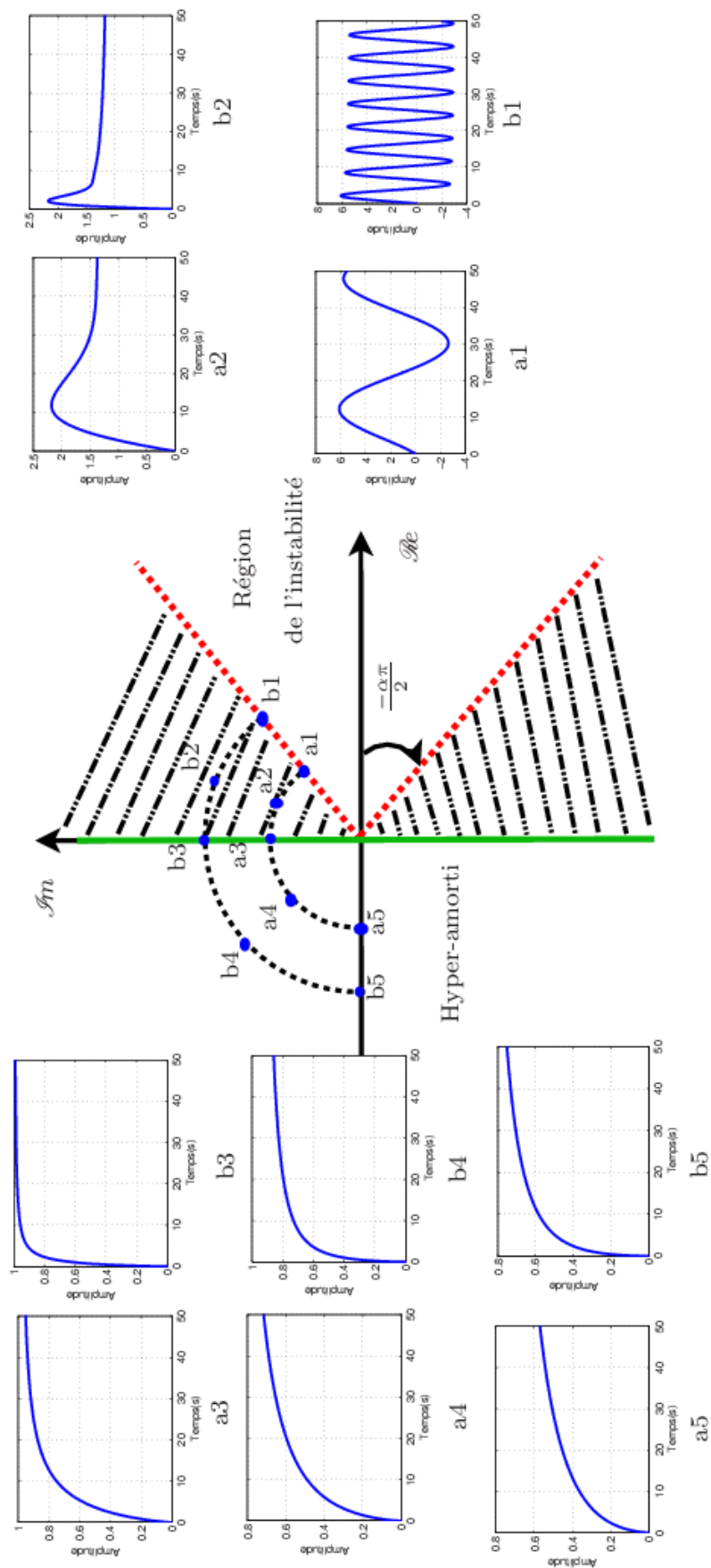
L'angle ψ indiqué dans la figure (2.24) est tel que $\psi = \arccos(-\xi)$ est une fonction décroissante de ξ . Pour $\xi \geq 0$, lorsque ξ décroît les pôles se rapprochent de l'axe imaginaire en s'éloignant de la limite de stabilité dans le cas $\alpha > 1$.

Par contre, pour $\xi \leq 0$, ψ est une fonction croissante de ξ . Ainsi, lorsque ξ croît, ψ augmente et les pôles s'évoluent vers le demi-plan gauche en s'éloignant de la limite de stabilité pour $\alpha < 1$. Alors, une variation de ξ (c-à-d ψ) fait varier le comportement du système (2.8).

Cependant, les limites de stabilité et de résonance sont établies en fonction de l'ordre du système α . Alors, une variation de α fait varier l'emplacement de ces limites dans le plan p^α . Par conséquent, pour un pôle en p^α fixe (ξ est constant), si on augmente α alors la limite de stabilité se rapproche du pôle en p^α et le premier dépassement augmente. D'où le système est plus oscillant avec l'augmentation de α .

Ainsi, dans la suite l'effet de l'emplacement des pôles en p^α sur les réponses indicielles correspondantes est étudié. Pour $0 < \alpha < 1$, les différents comportements du système (2.8) sont présentés dans le plan complexe suivant (figure (2.25)).

- Limite de résonance
- - - Oscillant-amorti
- ⋯ Oscillant et limite de stabilité



(a) $0 < \alpha < 0.5$

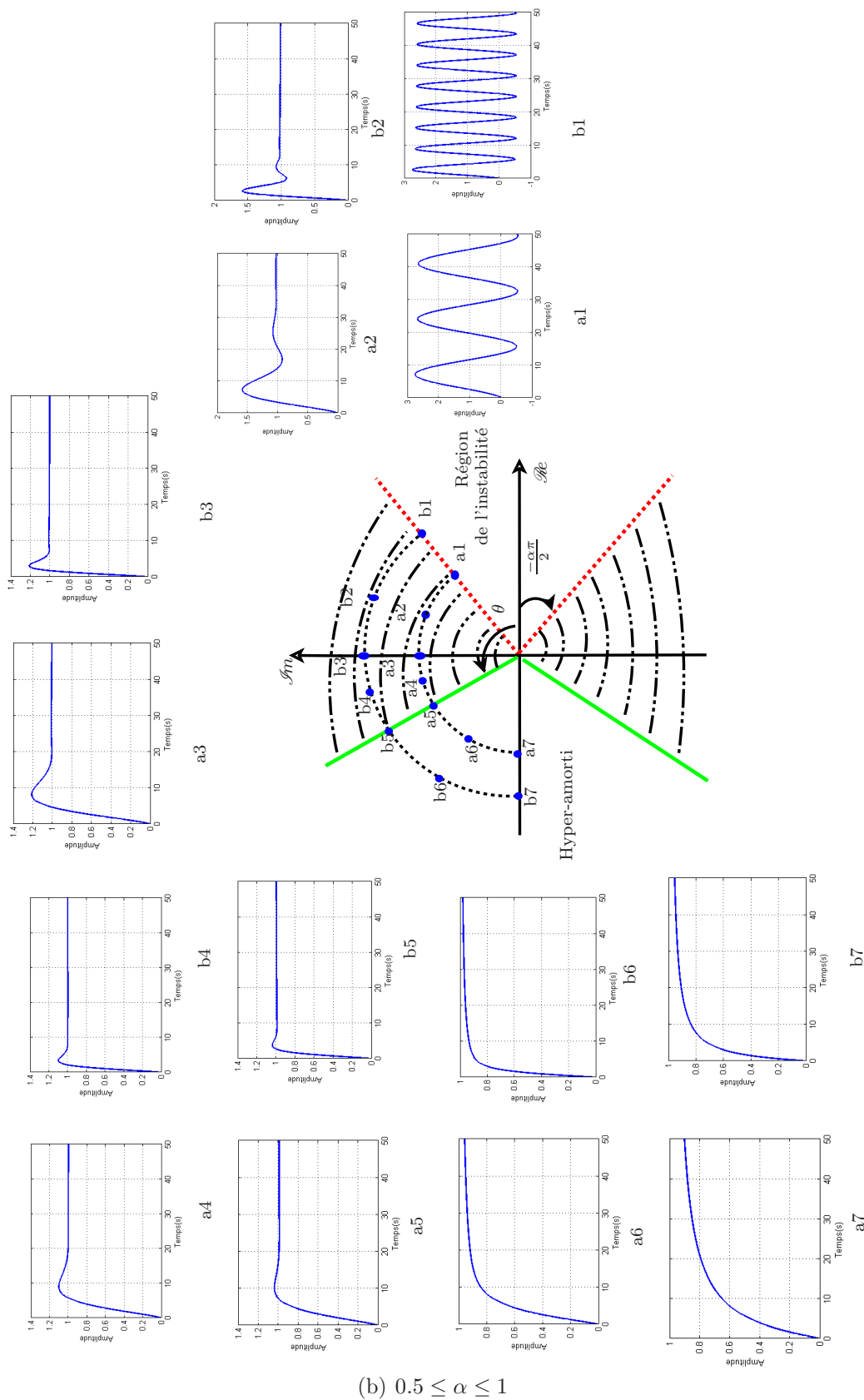


Figure 2.25 – Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $0 < \alpha < 1$.

Le plan complexe donné dans la figure (2.25) présente trois types du comportement :

- oscillant au voisinage de la limite de stabilité ;
- oscillant-amorti entre la limite de stabilité et de résonance ;
- hyper-amorti.

La limite de résonance est donnée par

- $\xi = 0$ pour $0 < \alpha < 0.5$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}$;
- $\xi \simeq 13.22\alpha^4 - 39.13\alpha^3 + 44.27\alpha^2 - 21.33\alpha + 3.663$ pour $0.5 \leq \alpha < 1$ avec $\theta = \pi - \arccos(\xi)$.

La limite de stabilité est décrite comme suit :

$$\xi = -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \forall \quad 0 < \alpha < 2. \quad (2.45)$$

Pour des ordres de α supérieur à 1, la limite de stabilité se trouve dans le demi-plan gauche et le système (2.8) est toujours résonant. La figure (2.26) illustre l'effet de l'emplacement des pôles en p^α sur les réponses indicielles.

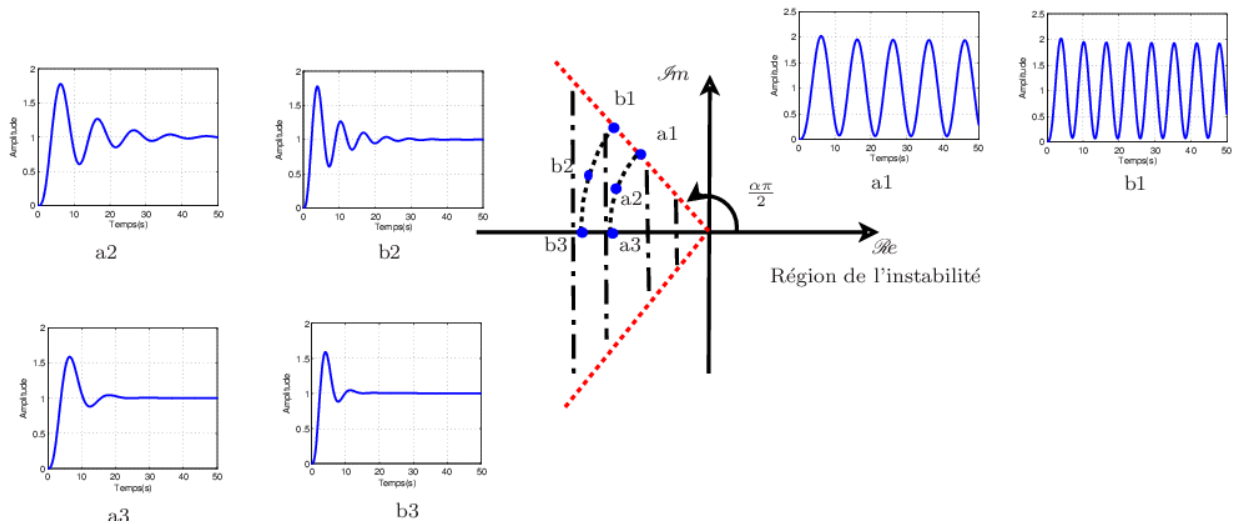


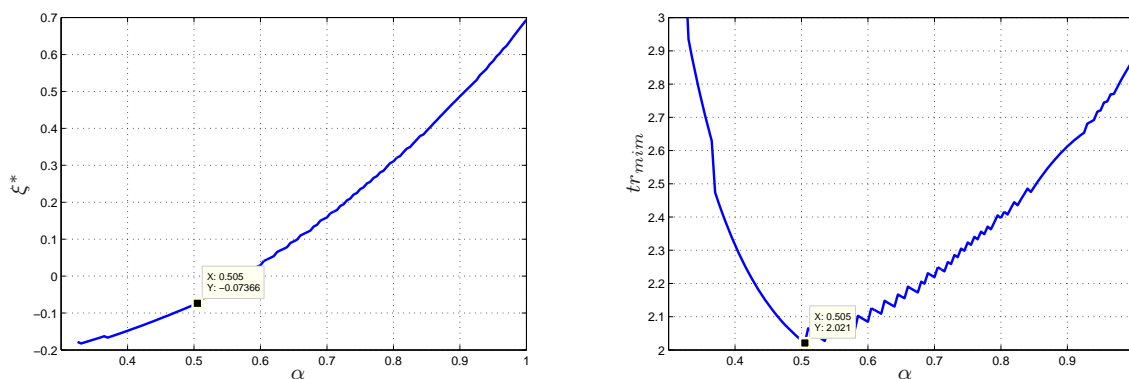
Figure 2.26 – Comportements d'un système de seconde espèce dans le plan p^α pour $1 \leq \alpha < 2$.

Le temps de réponse diminue en augmentant le module du pôle en p^α (c-à-d ω_n). Il convient alors de déterminer les paramètres qui donne le temps de réponse minimal.

2.2.2.3 Paramètres optimaux

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer le couple optimal de paramètres (α^*, ξ^*) qui donne un temps de réponse minimal quelque soit les valeurs de ω_n .

En effet, pour une valeur constante de ω_n ($\omega_n = 1$ rad/s), la valeur optimale ξ^* est obtenue numériquement pour chaque valeur de α comme le montre la figure (2.27).



(a) Pseudo-facteur d'amortissement optimal en fonction de α (b) Temps de réponse minimal en fonction de α

Figure 2.27 – Temps de réponse minimal en fonction des paramètres du système de seconde espèce ξ et α pour $\omega_n = 1$ rad/s.

D'après la figure (2.27), le couple optimal est donné par $\alpha^* = 0.505$ et $\xi^* = -0.07366$. Ce qui donne le pôle en p^{α^*}

$$p_{1,2}^{\alpha^*} = -\xi^* \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^{*2}} = \omega_n (0.07366 \pm j0.9973). \quad (2.46)$$

ou encore par

$$p_{1,2}^{\alpha^*} = \omega_n e^{j\psi^*} = \omega_n e^{j85.7758}. \quad (2.47)$$

Remarque 2.4 Les valeurs données sont évaluées numériquement avec une précision de 0.001 sur l'ordre de α .

La figure (2.28) illustre l'emplacement du pôle p^{α^*} .

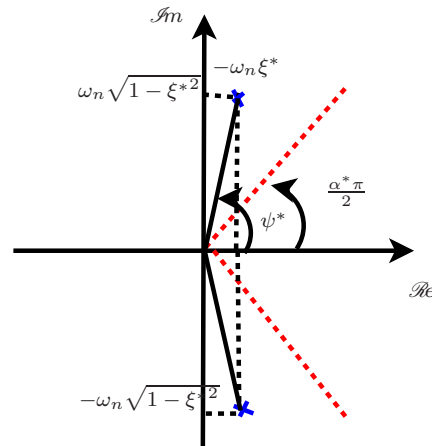


Figure 2.28 – Emplacement optimal du pôle en p^α d'un système de seconde espèce dans le plan p^α .

Dans ce cas, une augmentation du module de pôle ω_n permet d'améliorer le temps de réponse minimal.

Les réponses indicielles du système non entier de seconde espèce présentent des comportements temporels différents d'un système de second ordre. Ainsi, trois types des comportements sont obtenus

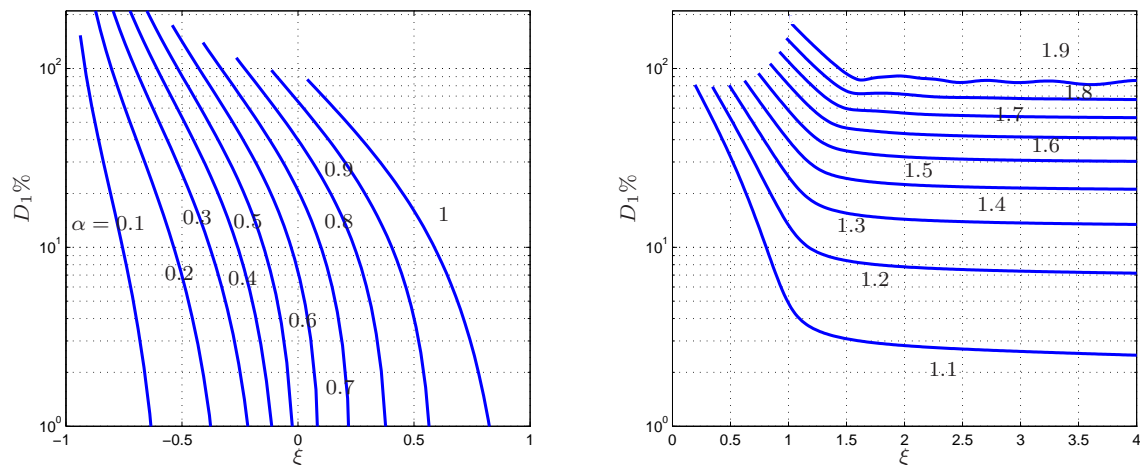
- oscillant-amorti pour $1 < \alpha < 2$;
- hyper-amorti pour $0 < \alpha < 1$;
- cas critique $\alpha = 1$.

Il convient alors d'étudier les trois principales caractéristiques, à savoir :

- le premier dépassement ;
- le temps de réponse ;
- le temps de montée.

2.2.2.4 Abaque du premier dépassement

La figure (2.29) montre l'abaque du premier dépassement $D_1\%$ d'un système de seconde espèce en fonction du pseudo-facteur l'amortissement ξ pour différentes valeurs de α .



(a) Premier dépassement en fonction de ξ pour $0 < \alpha \leq 1$ (b) Premier dépassement en fonction de ξ pour $1 < \alpha \leq 1.9$

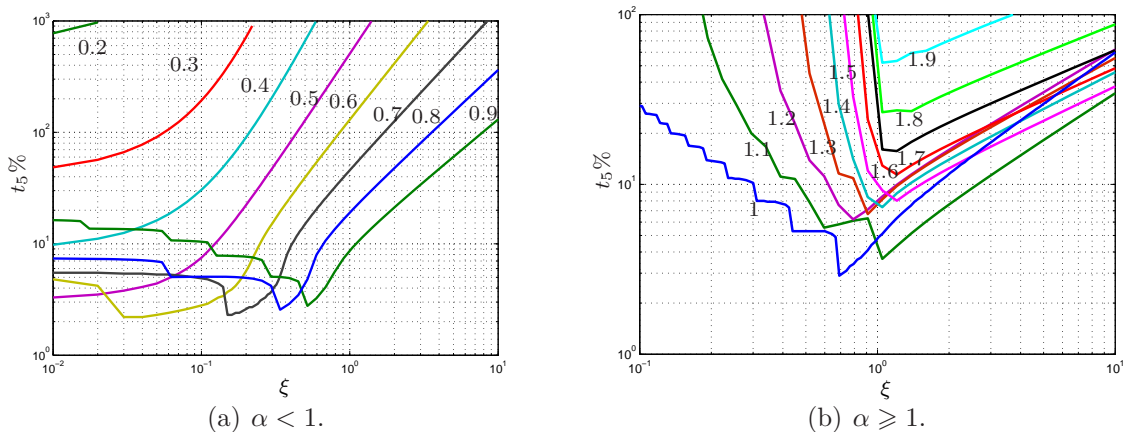
Figure 2.29 – Abaque du premier dépassement $D_1\%$ d'un système de seconde espèce en fonction de ξ pour $0 < \alpha < 2$.

Les tracés du premier dépassement de la figure (2.29) revelent :

- l'apparition du premier dépassement même pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- l'existence du premier dépassement pour tout $\alpha > 1$;
- la disparition du premier dépassement pour des ordres $\alpha \leq 0.5$ avec $\xi > 0$.

2.2.2.5 Abaque du temps de réponse

Les figures suivantes présentent les abaques du temps de réponse t_r d'un système de seconde espèce en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ pour $0 < \alpha < 2$, avec $\omega_n = 1\text{rad/s}$. Une variation de la pulsation propre ω_n fait varier les abaques du temps de réponse. En effet, chaque valeur de ω_n admet ses propres abaques. On peut choisir $\omega_n = 1\text{rad/s}$ pour tracer ces courbes.


 Figure 2.30 – Abaque du temps de réponse t_r en fonction de ξ pour $\omega_n = 1\text{rad/s}$.

La figure (2.30) montre que :

- pour les ordres de dérivation $\alpha < 0.2$, le comportement de la réponse est très lent et le temps de réponse tend pratiquement vers l'infini ;
- le temps de réponse admet deux comportements : pour les faibles valeurs de ξ , sa variation est inversement proportionnelle. Cependant, pour les valeurs assez grandes de ξ il devient proportionnelle.

Il est important de souligner que le système de seconde espèce peut avoir un temps de réponse inférieur à 3 secondes en particulier lorsque $\alpha < 1$ ((2.30(a))). Les abaques tracés sur la figure (2.30), ne sont valables que pour un système de seconde espèce avec $\omega_n = 1$ rad/s. Pour généraliser l'utilisation de ces abaques aux autres valeurs de ω_n , une formule donnée dans [Sabatier *et al.*, 2003] peut être utilisée :

$$t_r(5\%)_{\forall\omega_n} = \frac{t_r(5\%)_{\omega_n=1}}{\omega_n^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}}. \quad (2.48)$$

2.2.2.6 Abaque du temps de montée

La figure (2.31) présente les abaques du temps de montée d'un système de seconde espèce en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ pour différentes valeurs de α .

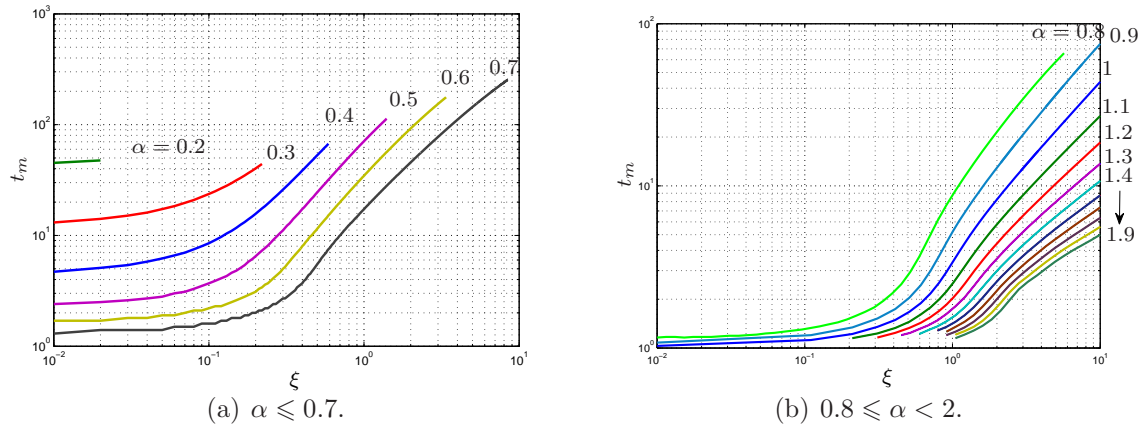


Figure 2.31 – Abaque du temps de montée t_m en fonction de ξ pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.

Les abaques donnés par la figure (2.31) montrent que le temps de montée t_m est proportionnel à ξ pour une valeur constante de α . Par contre, pour une valeur constante de ξ , il est inversement proportionnel à α .

2.2.3 Système élémentaire d'ordre non entier de seconde espèce non commensurable

Dans cette partie, les comportements temporels d'un système de seconde espèce non commensurable sont étudiés. De plus, l'effet des paramètres du système sur les réponses indicielles est analysé. Des abaques des caractéristiques temporelles sont établis.

2.2.3.1 Effet des paramètres du système sur les réponses indicielles

Les réponses indicielles du système de seconde espèce (2.22) pour différentes valeurs de ξ et α sont présentées sur les figures (2.32) et (2.33).

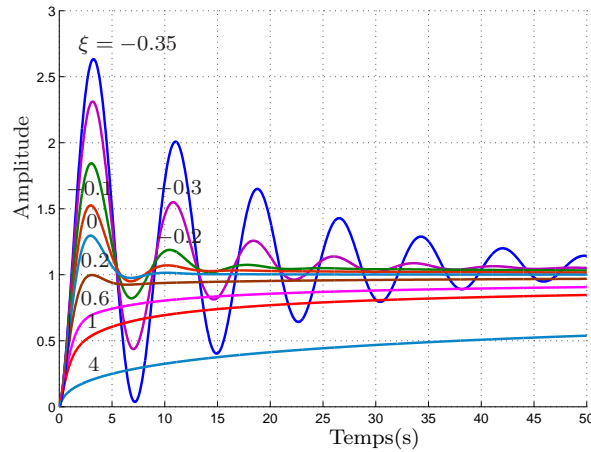


Figure 2.32 – Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ avec $\alpha = 0.5$ et $\omega_n = 1$ rad/s.

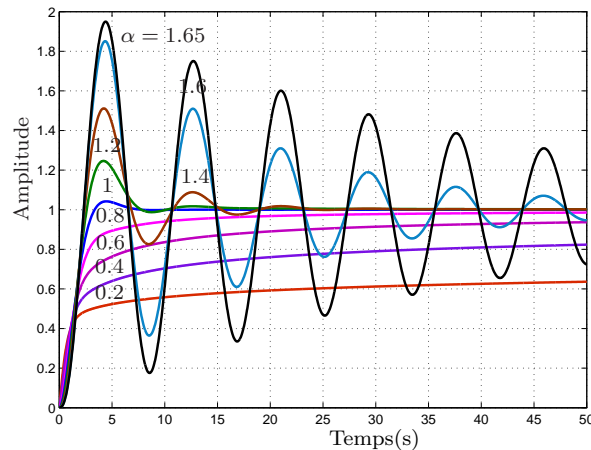


Figure 2.33 – Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de α avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_n = 1$ rad/s.

D'après la figure (2.32) deux types des comportements sont révélés :

- Pour $\alpha = 0.5$ et $\xi \geq 0.2$, le système est hyper-amorti. Ceci est dû aux paramètres du système ξ et α qui sont localisés dans la région A de la figure (2.12).
- Pour $\alpha = 0.5$ et $-0.35 \leq \xi < 0.2$, le système est oscillant-amorti car ξ et α sont situés dans la région B. Ce qui donne un système résonant.

De même, la figure (2.33) montre trois comportements :

- Pour $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0 < \alpha < 1$, le système est hyper-amorti ;
- Pour $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $1 < \alpha \leq 1.65$, le système est oscillant-amorti ;
- Pour $\alpha = 1$, le comportement du système est critique amorti.

Remarque 2.5 Les régions A et B de la figure (2.12) définissent respectivement les

systèmes hyper et oscillant-amortis.

Dans les paragraphes suivants, les abaques des performances temporelles sont étudiés. Dans cette étude, la limite inférieure de pseudo-facteur d'amortissement ξ est fixée pour éviter les cas du système très oscillant. Aussi la limite supérieure de ξ est fixée pour éviter le cas où le système est très lent surtout pour $\alpha < 1$.

2.2.3.2 Abaque du premier dépassement

La figure (2.34) présente les réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ω_n avec $\xi = 0.7$ et $\alpha = 1.2$.

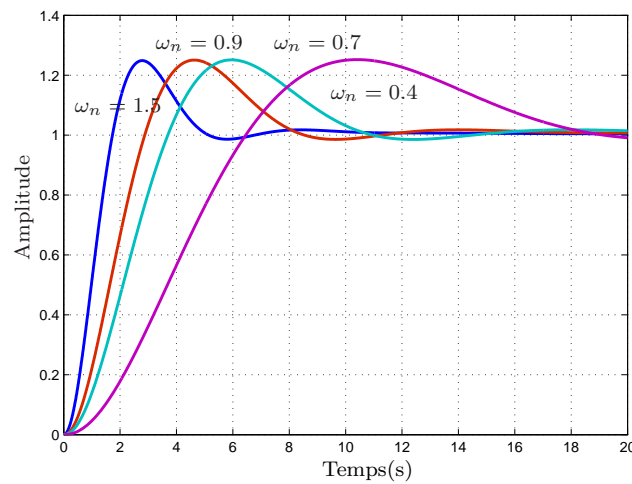


Figure 2.34 – Réponses indicielles d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ω_n avec $\xi = 0.7$ et $\alpha = 1.2$.

La figure (2.34) montre que le premier dépassement est indépendant de la pulsation propre ω_n pour $\alpha = 1.2$ et $\xi = 0.7$. De ce fait, on peut choisir n'importe quelle valeur de ω_n ($\omega_n = 1$) pour tracer les courbes du premier dépassement.

La figure (2.35) donne les courbes du premier dépassement $D_1(\%)$ en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ pour différentes valeurs de α .

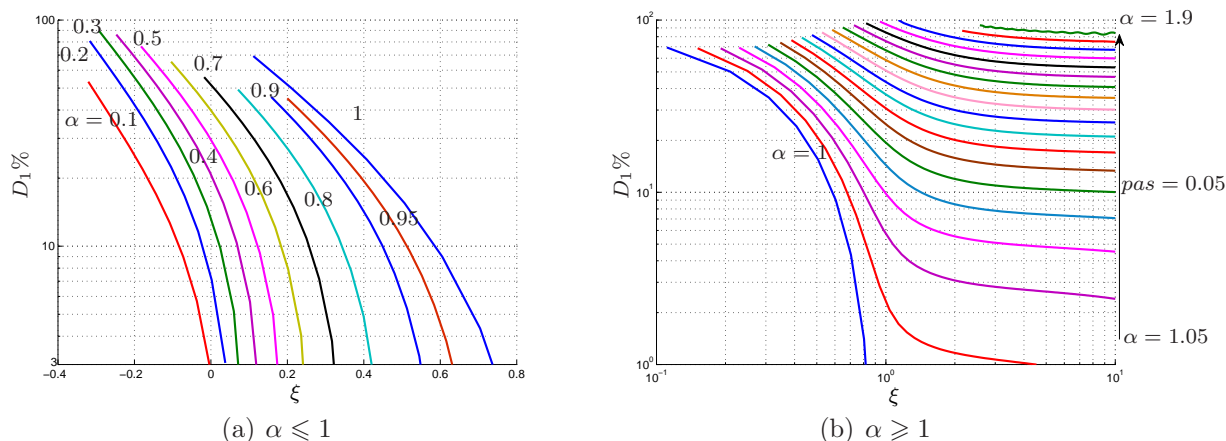


Figure 2.35 – Abaque du premier dépassement d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α .

Il est intéressant de souligner que le premier dépassement existe même si $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et il devient quasi-constant pour $\alpha > 1.05$ et $\xi > 3$. Cependant, pour $\alpha \leq 1$, la condition d'existence de premier dépassement $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ est nécessaire et non suffisante.

2.2.3.3 Abaque du temps de réponse

Contrairement au cas rationnel, une variation de la pulsation propre ω_n provoque le changement des courbes du temps de réponse. Ainsi chaque valeur de ω_n admet ses propres courbes du temps de réponse. Les figures (2.36(a)) et (2.36(b)) montrent l'évolution du temps de réponse en fonction du pseudo-facteur d'amortissement pour $\omega_n = 1\text{rad/s}$ et différentes valeurs de $0 < \alpha < 2$.

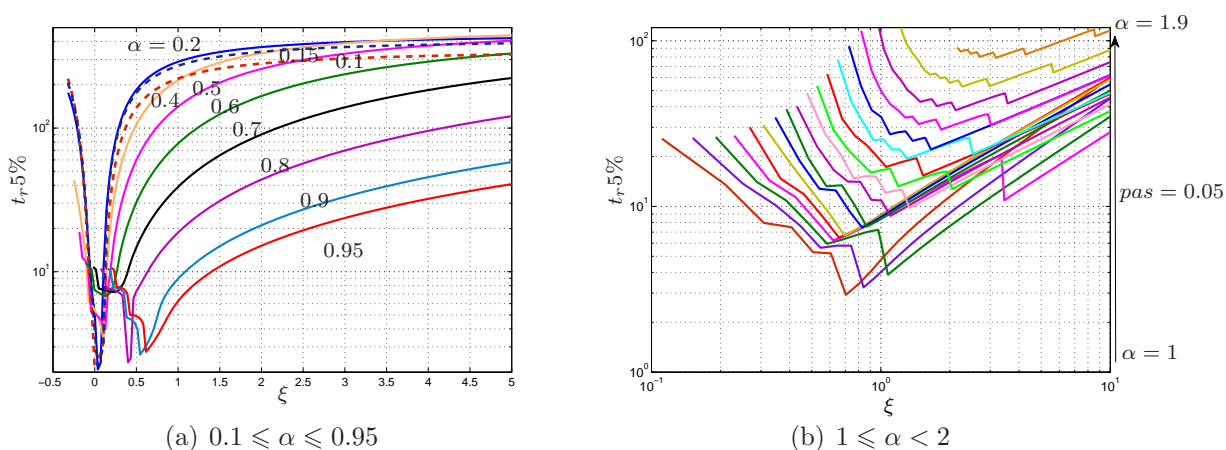


Figure 2.36 – Abaque du temps de réponse d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α avec $\omega_n = 1\text{ rad/s}$.

D'après la figure (2.36), le temps de réponse possède deux comportements :

- Pour les faibles valeurs de ξ , le temps de réponse du système (2.22) est inversement proportionnel à ξ ;
- Pour les valeurs élevées de ξ , le temps de réponse est proportionnel à ξ .

Remarque 2.6 Contrairement au système rationnel, le système (2.22) peut avoir un temps de réponse inférieur à 3 secondes lorsque $\alpha < 1$.

2.2.3.4 Abaque du temps de montée

Une variation de la pulsation propre ω_n peut changer l'évolution du temps de montée. Ainsi, chaque valeur de ω_n admet ses propres abaques. Les figures (2.37(a)) et (2.37(b)) présentent les courbes du temps de montée en fonction de ξ pour $\omega_n = 1\text{rad/s}$ et différentes valeurs de α .

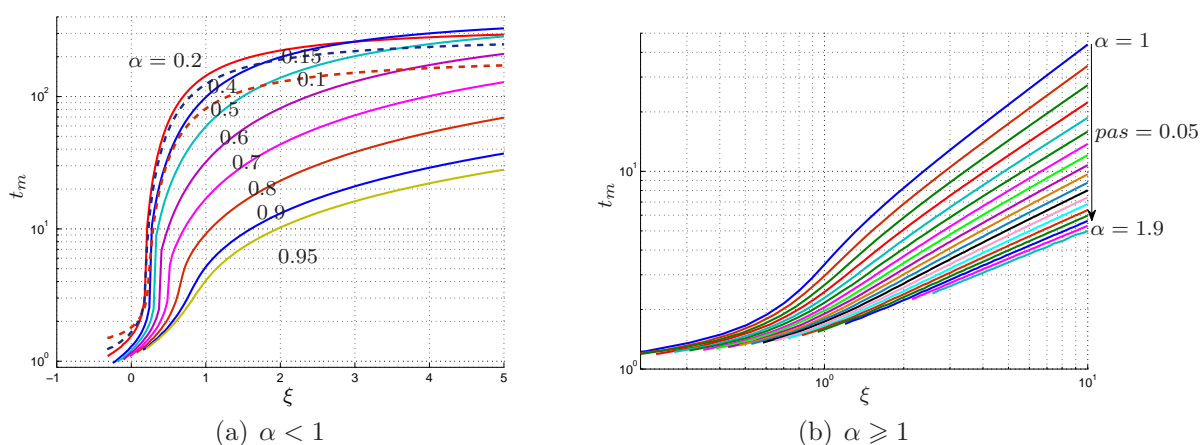


Figure 2.37 – Abaque du temps de montée d'un système de seconde espèce non commensurable pour différentes valeurs de ξ et α avec $\omega_n = 1\text{rad/s}$.

On constate que pour une valeur constante et positive de ξ , le temps de montée est proportionnel à α pour $\alpha < 0.2$. Mais, pour $0.2 \leq \alpha < 2$, il est inversement proportionnel à α . De plus, pour une valeur constante de α , le temps de montée est proportionnel au pseudo-facteur d'amortissement ξ .

2.3 Conclusion

Les principales caractéristiques intrinsèques des systèmes élémentaires d'ordre non entier sont étudiées en détails à savoir : les comportements temporels et fréquentiels à la résonance. Les conditions de résonance sont déterminées en fonction du pseudo-facteur

d'amortissement ξ et de l'ordre non entier α . Des abaques des spécifications fréquentielles à la résonance sont déterminés. Concernant les spécifications temporelles, trois abaques temporels sont tracés en fonction de ξ et α permettant de déterminer le pseudo-facteur d'amortissement et l'ordre non entier selon les performances temporelles désirées à savoir le temps de réponse, le temps de montée et le premier dépassement. L'effet de l'emplacement des pôles sur les réponses indicielles est aussi étudié. En effet, les paramètres optimaux du système fournissant le temps de réponse minimal sont obtenus.

Les résultats trouvés dans ce chapitre seront utilisés pour une application à la commande qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Application à la commande

3.1 Introduction

Le PID classique a acquis une importance considérable dans la plupart des applications industrielles [Panagopoulos *et al.*, 2002, Ramasamy et Sundaramoorthy, 2008]. L'utilisation consistante de ce type de régulateur est due à sa facilité d'utilisation, sa simplicité d'implémentation et sa capacité de commander la majorité des systèmes. Bien qu'il existe plusieurs techniques dans la synthèse, un travail de recherche continu et intensif est encouragé pour améliorer ses performances. En effet, une généralisation des régulateurs PI, PD et PID classiques par PI^α , PD^β et $PI^\alpha D^\beta$, avec I^α et D^β représentant respectivement les actions d'intégration et de dérivation d'ordre non entier α et β , a été proposée par [Podlubny, 1999].

La commande générée par ces régulateurs a fourni une meilleure flexibilité dans le réglage des paramètres grâce aux deux degrés supplémentaires de liberté α et β . Ainsi, les régulateurs non entiers sont plus adéquats que les classiques pour avoir un meilleur compromis entre les contraintes et les performances désirées [Ben Hmed *et al.*, 2013, Saidi *et al.*, 2015].

Généralement, l'objectif principal dans la synthèse de commande est d'obtenir un système en boucle fermée stable et rapide. Un compromis entre ces deux contraintes conduit la plupart de temps à imposer le comportement d'un système de second ordre. Cependant, le temps de réponse minimal qui peut fournir un système de second ordre à la pulsation propre unitaire est de l'ordre 3 secondes et il est résonant pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour surmonter ces limitations, un degré de liberté supplémentaire est introduit dans la boucle,

c'est l'ordre non entier α . Alors, au lieu d'imposer le comportement d'un système de second ordre rationnel, les systèmes élémentaires d'ordre non entier peuvent être utilisés. Ils sont présentés par l'une des fonctions de transfert suivantes :

$$F_d(p) = \frac{\omega_n^\alpha}{p^\alpha + \omega_n^\alpha}, \quad (3.1)$$

$$F_d(p) = \frac{\omega_n^2}{p^{2\alpha} + 2\xi\omega_n p^\alpha + \omega_n^2}, \quad (3.2)$$

$$F_d(p) = \frac{\omega_n^{\alpha+1}}{p^{\alpha+1} + 2\zeta\omega_n p^\alpha + \omega_n^{\alpha+1}}, \quad (3.3)$$

où $0 < \alpha < 2$, ω_n et ξ représentent respectivement l'ordre non entier, la pulsation propre et le pseudo-facteur d'amortissement.

Le travail présenté dans ce chapitre s'inscrit dans le cadre de la synthèse d'une commande non entière dont la boucle fermée désirée est définie par l'un des systèmes élémentaires. Sans perte de généralité, les systèmes commandés sont modélisés par des systèmes de premier ordre avec et sans intégration. Plusieurs méthodes de synthèse sont proposées pour commander les systèmes certains et incertains de premier ordre avec et sans intégration. Ainsi, une commande robuste en stabilité et en performances est déterminée.

3.2 Commande par compensation de pôles

3.2.1 Principe

Soit la boucle de commande à retour unitaire présentée par la figure (3.1).

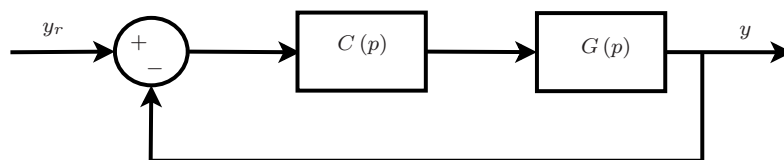


Figure 3.1 – Boucle de commande à retour unitaire.

y_r et y désignent l'entrée et la sortie de la boucle. $C(p)$ est le régulateur non entier et $G(p)$ est le procédé.

La fonction de transfert en boucle fermée est définie par

$$F_c(p) = \frac{Y(p)}{Y_r(p)} = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}. \quad (3.4)$$

En utilisant la méthode de compensation de pôles, la fonction de transfert du régulateur est décrite par

$$C(p) = \frac{F_d(p)}{G(p)(1 - F_d(p))}. \quad (3.5)$$

avec $F_d(p)$ est la fonction de transfert de la boucle fermée désirée.

3.2.2 Commande d'un système de premier ordre

La stratégie de synthèse utilise les systèmes élémentaires dans la boucle fermée désirée. Dans ce cas, afin d'avoir un régulateur réalisable, cette méthode est destinée pour commander un procédé de premier ordre donné par

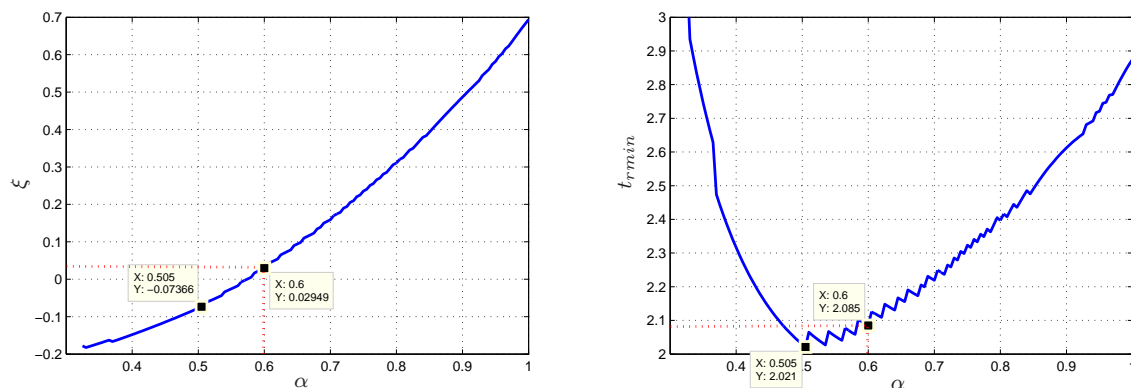
$$G(p) = \frac{b}{a + p}, \quad a \in R^*, \quad b \in R_+, \quad (3.6)$$

où b est le gain et a est le pôle du système.

La fonction de transfert du régulateur est donnée alors par

$$C(p) = \frac{a + p}{\left(\frac{1}{\omega_n^2}p^{2\alpha} + \frac{2\xi}{\omega_n}p^\alpha\right)b}. \quad (3.7)$$

Selon les performances désirées, les paramètres (ω_n , α et ξ) peuvent être déterminés graphiquement à partir des abaques donnés dans le second chapitre (abaque du premier dépassement page 78, abaque du temps de réponse page 79) et la figure (3.2).



(a) ξ en fonction de α pour un temps de réponse minimal. (b) Temps de réponse minimal en fonction de α .

Figure 3.2 – Temps de réponse minimal en fonction ξ et α pour $\omega_n = 1$ rad/s.

Exemple

Soit un procédé de premier ordre décrit par la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2p} \quad (3.8)$$

avec les performances désirées :

- une erreur statique nulle ;
- une pulsation propre unitaire ;
- un temps de réponse inférieur à 3 s ;
- un dépassement inférieur à 5%.

Pour garantir un temps de réponse inférieur à 3 secondes, l'ordre α peut être choisi tel que $0 < \alpha < 1$ et $-0.15 < \xi < 0.7$ (figure (3.2)). Si de plus on veut un premier dépassement inférieur à 5%, les paramètres du régulateur peuvent être fixés à $\xi \simeq 0.03$, $\alpha = 0.6$ et $\omega_n = 1$ rad/s (figure (2.29) page 78).

Par conséquent, le régulateur est donné par

$$C(p) = \frac{1 + 2p}{(p^{1.2} + 0.06p^{0.6})} \quad (3.9)$$

et la fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(s) = \frac{1}{s^{1.2} + 0.06s^{0.6} + 1}. \quad (3.10)$$

La figure (3.3) montre la réponse indicielle et la commande de la boucle fermée.

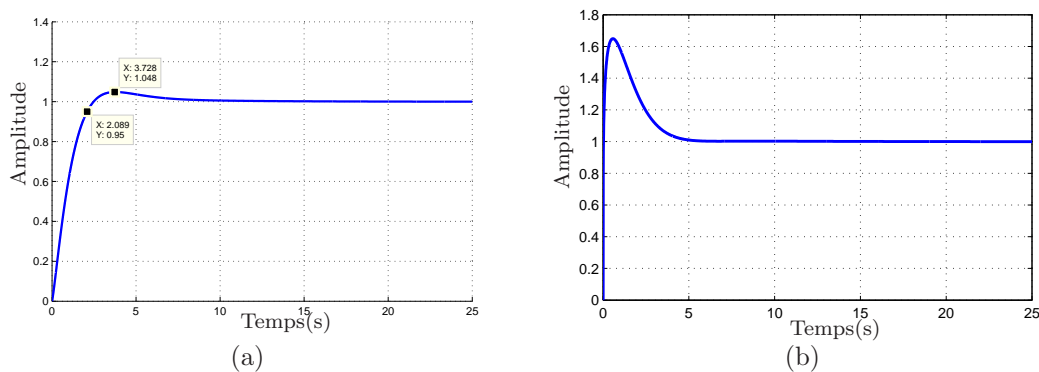


Figure 3.3 – Réponse indicielle et commande du système corrigé.

Les performances temporelles sont satisfaites avec un pic de commande acceptable.

Remarque 3.1 *Le couple optimal ($\alpha^* = 0.505$, $\xi^* = -0.0736$) donne toujours un temps de réponse minimal quel que soit ω_n . Ainsi, la rapidité du système en boucle fermée peut être améliorée en augmentant la valeur de ω_n (voir la relation (2.48)).*

3.3 Commande par un intégrateur non entier I^α

Cette section propose une nouvelle approche de synthèse d'un régulateur non entier avec deux degrés de liberté (k_i et α).

$$C(p) = I^\alpha = \frac{k_i}{p^\alpha} \quad (3.11)$$

Ce régulateur est utilisé pour commander les systèmes intégrateurs (intégrateur pur) et les systèmes instables de premier ordre avec et sans intégration. Il permet d'avoir une commande stabilisante et de garantir les performances désirées.

Les régions de stabilité de la boucle peuvent être établies analytiquement en fonction de paramètres du procédé.

3.3.1 Commande d'un système intégrateur

Considérons un procédé modélisé par un intégrateur pur décrit par

$$G(p) = \frac{b}{p}, \quad (3.12)$$

où b est un réel positif non nul.

En utilisant la boucle de commande donnée par la figure (3.1), la fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{k_i b}{s^\beta + k_i b}, \quad (3.13)$$

où $\beta = \alpha + 1$.

En identifiant les termes de la fonction de transfert (3.13) par celle désirée (3.1), on obtient alors

$$k_i b = \omega_n^\alpha. \quad (3.14)$$

Si $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, la relation (3.14) donne $k_i = \frac{1}{b}, \forall \alpha$ sinon l'ordre du régulateur peut être exprimé en fonction de k_i, ω_n et b tel que

$$\alpha = \frac{\ln(k_i b)}{\ln(\omega_n)}, \quad \omega_n \neq 1. \quad (3.15)$$

Compte tenu des résultats de l'analyse du système de première espèce (section 2.2.1 page 66), l'ordre α est choisi entre 0 et 1 pour avoir toujours un système stable en boucle fermée. De plus, les courbes des principales propriétés à savoir

- la courbe du premier dépassement (figure (3.4(a))),
- la courbe du temps de réponse à $\pm 5\%$ pour $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ (figure (3.4(b))),

peuvent être utilisées pour fixer l'ordre non entier α du régulateur.

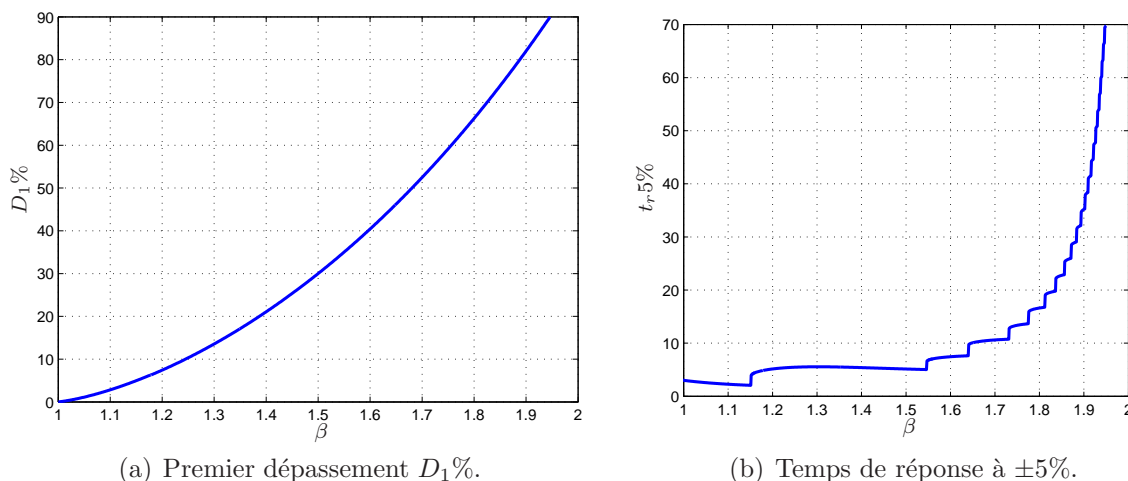


Figure 3.4 – Abaques du premier dépassement et du temps de réponse d'un système de première espèce pour différentes valeurs de $\beta = \alpha + 1$ avec $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$.

Exemple

Pour illustrer la méthode de synthèse, soit le procédé décrit par

$$G(p) = \frac{1}{p} \quad (3.16)$$

Les performances désirées en boucle fermée sont :

- une erreur statique nulle ;
- un premier dépassement inférieur à 5% ;
- un temps de réponse au voisinage de 2 secondes.

Pour garantir les performances désirées, les paramètres du régulateur peuvent être fixés à partir de la figure (3.4) et la relation (3.14) à $\alpha = \beta - 1 = 0.151$ et $k_i = 1$.

Ainsi, les fonctions de transfert du régulateur et du système en boucle fermée sont données respectivement par :

$$C(p) = \frac{1}{p^{0.151}}, \quad (3.17)$$

$$F(p) = \frac{1}{1 + p^{1.151}}. \quad (3.18)$$

La réponse indicielle et la commande du système en boucle fermée $F(p)$ sont présentées sur la figure (3.5).

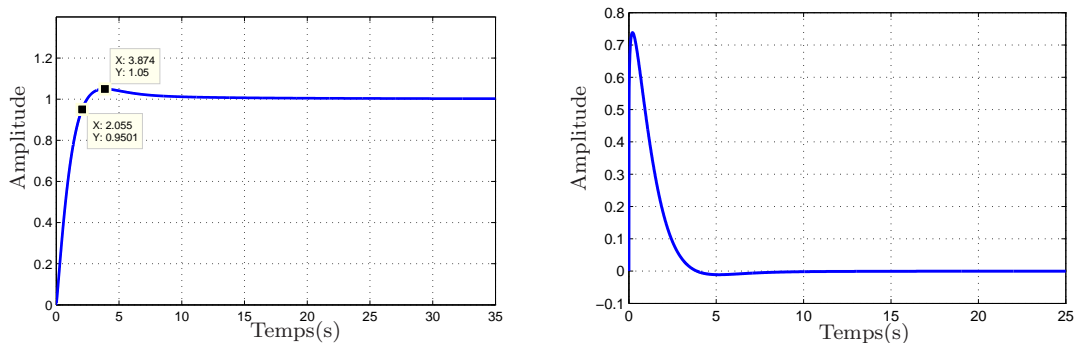


Figure 3.5 – Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée $F(p)$ pour $k_i = 1$.

La figure (3.5) montre que les performances temporelles sont vérifiées avec un pic de commande acceptable.

Remarque 3.2 Dans le cas où $\omega_n \neq 1$ rad/s (c-à-d $k_i \neq \frac{1}{k}$), le temps de réponse peut

être obtenu à travers la figure (3.4(b)) et la formule (3.19) :

$$t_{r5\%}|_{\forall\omega_n} = \frac{t_{r5\%}|_{\omega_n=1}}{(kk_i)^{\frac{1}{\alpha+1}}}. \quad (3.19)$$

Maintenant, si pour le même ordre $\alpha = 0.151$ on veut un temps de réponse $t_r \simeq 0.5s$ au lieu de $2s$, alors d'après la formule (3.19) le gain du régulateur k_i est choisi tel que

$$k_i = \frac{\left(\frac{t_{r5\%}|_{\omega_n=1}}{t_{r5\%}|_{\forall\omega_n}}\right)^{\alpha+1}}{k} = \left(\frac{2.055}{0.5}\right)^{1.151} \simeq 5. \quad (3.20)$$

Avec la nouvelle valeur de k_i , la réponse indicielle (figure (3.6)) montre que le système devient plus rapide avec un $D_1 \simeq 5\%$ et un pic de commande qui reste acceptable.

Comme le temps de réponse est directement lié au gain de la boucle ouverte $k_i k$ alors le système $F(p)$ devient plus rapide en augmentant k_i

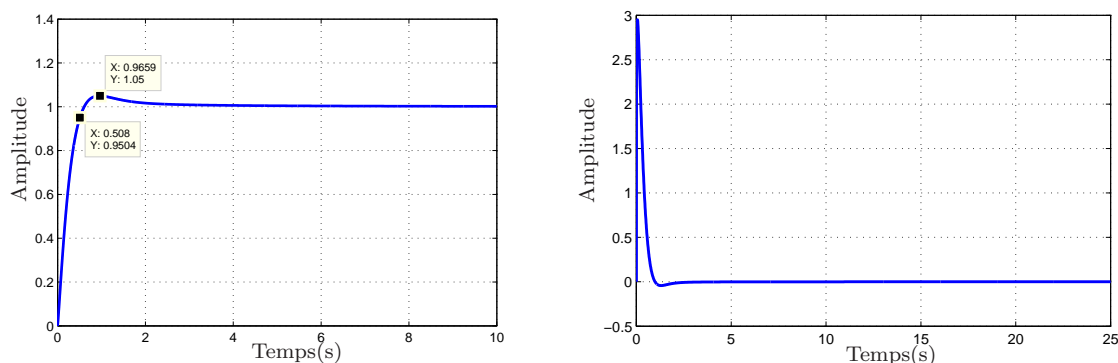


Figure 3.6 – Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée $F(p)$ pour $k_i = 5$.

Remarque 3.3 L'ordre non entier $\beta = \alpha + 1 = 1.151$ donne toujours le temps de réponse minimal quel que soit ω_n (c'est à dire $\forall k_i k$). Ainsi, en fixant l'ordre du régulateur à $\alpha = 0.151$, la rapidité du système en boucle fermée peut être améliorée en augmentant k_i .

3.3.2 Commande et stabilisation d'un système de premier ordre

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les paramètres du régulateur k_i et α pour stabiliser et commander le procédé (3.21).

$$G(p) = \frac{b}{p+a}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}_+^*. \quad (3.21)$$

La fonction de transfert de la boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{k_i b}{p^{\alpha+1} + ap^{\alpha} + k_i b}. \quad (3.22)$$

En identifiant les termes de la fonction de transfert (3.22) par celle désirée (3.3), on obtient alors

$$\begin{cases} a = 2\xi\omega_n \\ bk_i = \omega_n^{\alpha+1} \end{cases} \quad (3.23)$$

Si $\omega_n = 1\text{rad/s}$, la relation (3.23) donne $k_i = \frac{1}{b}$, $\forall \alpha$ si non l'ordre du régulateur peut être exprimé en fonction de k_i , ω_n et b tel que

$$\alpha = \frac{\ln(bk_i)}{\ln(\omega_n)} - 1, \quad \omega_n \neq 1. \quad (3.24)$$

Dans la suite, une nouvelle stratégie pour déterminer toutes les valeurs stabilisantes des paramètres du régulateur $C(p)$ dans le plan (k_i, α) est proposée. D'après la relation (3.23), les régions de stabilité et de résonance du système (3.22) (figure (2.12)) peuvent être présentées dans le plan $(\frac{a}{2\omega_n}, \alpha)$ comme dans la figure (3.7).

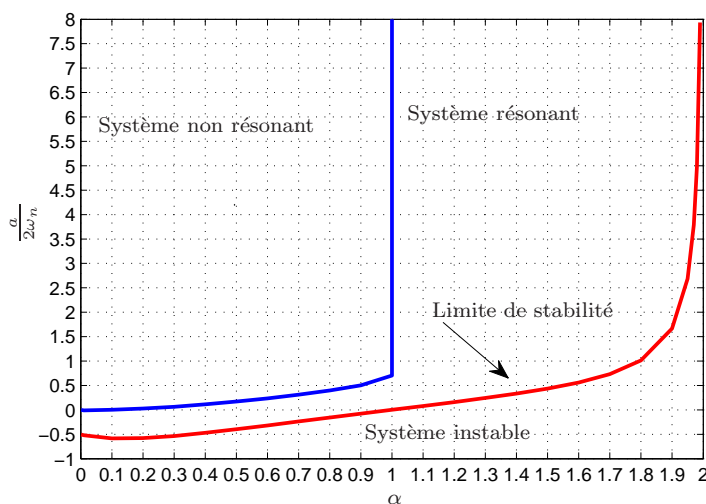


Figure 3.7 – Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$.

La figure (3.7) montre que pour $0 < \alpha < 1$ et $a > 0$, le système en boucle fermée $F(p)$ est toujours stable. Cependant, il est instable pour $a < 0$ et $1 \leq \alpha < 2$.

Dans le cas où $a < 0$ et $0 < \alpha < 1$, la région de stabilité de $F(p)$ est illustrée par la zone colorée de la figure (3.8).

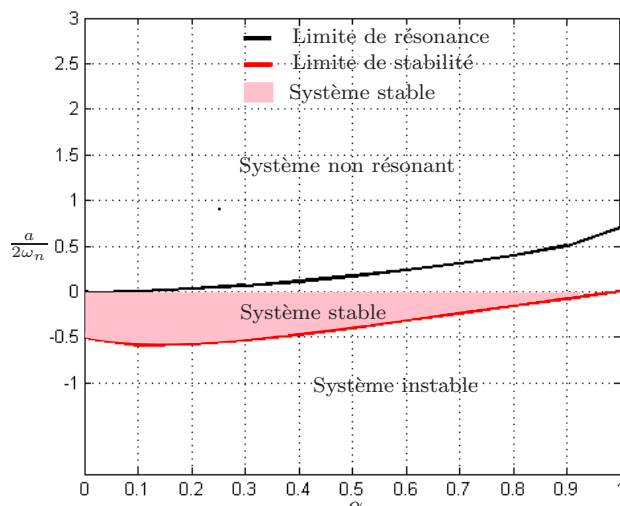


Figure 3.8 – Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$ pour $0 < \alpha \leq 1$.

D'après le Théorème (1.5), le système en boucle fermée est stable pour $a < 0$ et $0 < \alpha < 1$ ssi la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{-a2^{\alpha+1}}{2(k_i b)^{\frac{1}{\alpha+1}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(\frac{-a}{2(k_i b)^{\frac{1}{\alpha+1}}} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)^\alpha < 1. \quad (3.25)$$

En tenant compte de ces résultats, une plage de variation de k_i est déterminée pour obtenir un système en boucle fermée stable.

L'objectif est d'obtenir un système en boucle fermée stable et de vérifier les performances désirées. Pour satisfaire cet objectif, deux étapes de synthèse sont considérées :

- Étapes de stabilisation :
 - si $a \geq 0$, le système en boucle fermée est toujours stable ;
 - si $a < 0$, la région de stabilisation (k_i, α) est obtenue à travers la relation (3.25).
- Étapes de la synthèse de la commande : la synthèse de régulateur se fait à travers les abaques des principales propriétés à savoir :
 - l'abaque du premier dépassement du système désiré $F_d(p)$ avec $\xi = \frac{a}{2\omega_n}$ (figure (2.35)) ;
 - les courbes du temps de réponse minimal du système désiré $F_d(p)$ avec $\xi = \frac{a}{2\omega_n}$ pour $\omega_n = 1$ rad/s (figure (3.9)).

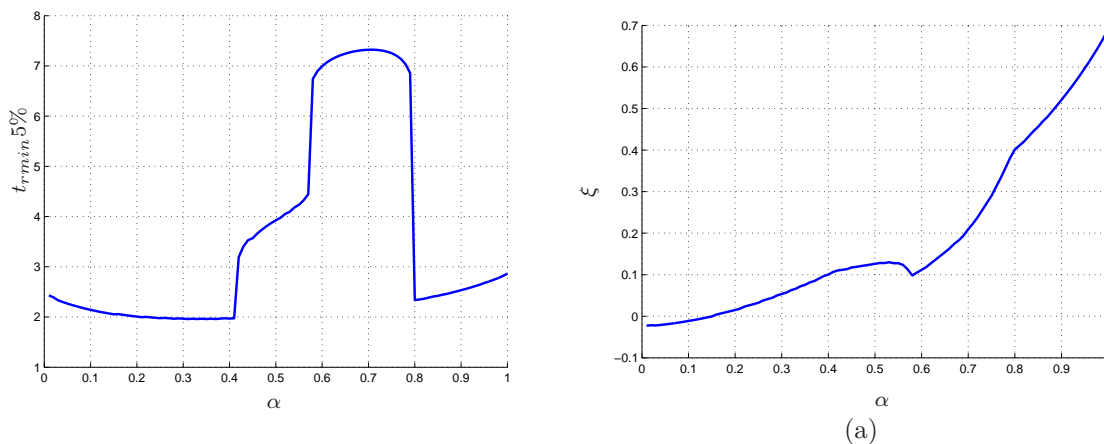


Figure 3.9 – Temps de réponse minimal du système désiré en boucle fermée pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.

Exemple

soit un procédé de premier ordre décrit par

$$G(p) = \frac{1}{p + 0.8}. \quad (3.26)$$

Les performances désirées de la boucle fermée sont :

- une erreur statique nulle ;
- une pulsation propre unitaire ;
- un premier dépassement $D_1 \simeq 5\%$;
- un temps de réponse inférieur à 3 secondes.

D'après la relation (3.23), pour avoir une pulsation propre unitaire, le gain k_i est fixé à $k_i = 1$. De plus, pour garantir un premier dépassement $D_1 \simeq 5\%$, l'ordre α peut être choisi $\alpha = 0.8$ pour $\xi = \frac{\alpha}{2\omega_n} = 0.4$ (figure (2.35(a))). Avec ces paramètres, la figure (3.9) montre que le temps de réponse correspondant est inférieur à 3 secondes.

Ainsi, la fonction de transfert du régulateur $C(p)$ est de la forme

$$C(p) = \frac{1}{p^{0.8}}. \quad (3.27)$$

La fonction de transfert de la boucle fermée obtenue est de la forme

$$F(p) = \frac{1}{p^{1.8} + 0.8p^{0.8} + 1} \quad (3.28)$$

La figure (3.10) montre que les performances temporelles désirées de la boucle fermée

(3.28) sont satisfaites avec une commande tolérable.

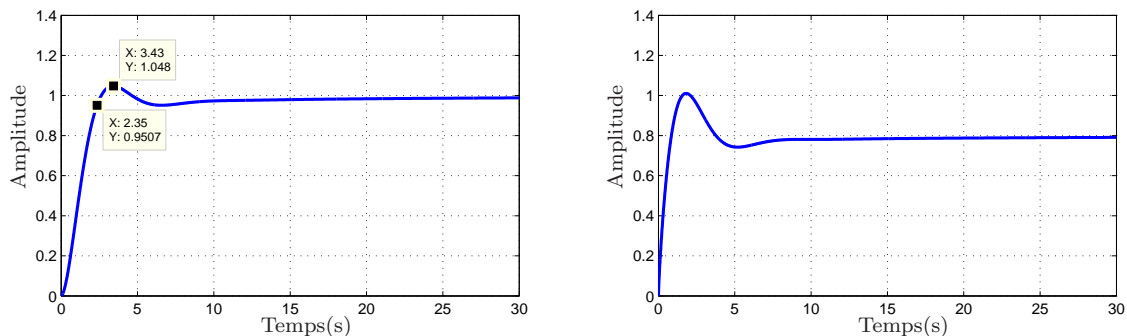


Figure 3.10 – Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée pour $\alpha = 0.8$ et $k_i = 1$.

3.3.3 Commande et stabilisation d'un système de premier ordre avec intégration

Ce paragraphe s'intéresse à la commande d'un système de premier ordre avec intégration avec un régulateur non entier I^α .

Soit le procédé suivant

$$G(p) = \frac{b}{p(p+a)}. \quad (3.29)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{k_i b}{p^{\alpha+2} + ap^{\alpha+1} + k_i b} = \frac{k_i b}{p^{\beta+1} + ap^\beta + k_i b}, \quad (3.30)$$

avec $\beta = \alpha + 1$ et $1 < \beta < 2$.

Les coefficients de la boucle fermée $F(p)$ s'expriment en fonction des paramètres de la fonction de transfert désirée (3.3). Les régions de stabilité et de résonance de $F(p)$ sont alors déduites à partir de la figure (2.12). Ainsi, ses régions dans le plan $(\frac{a}{2\omega_n}, \alpha)$ sont conformément à la figure (3.11).

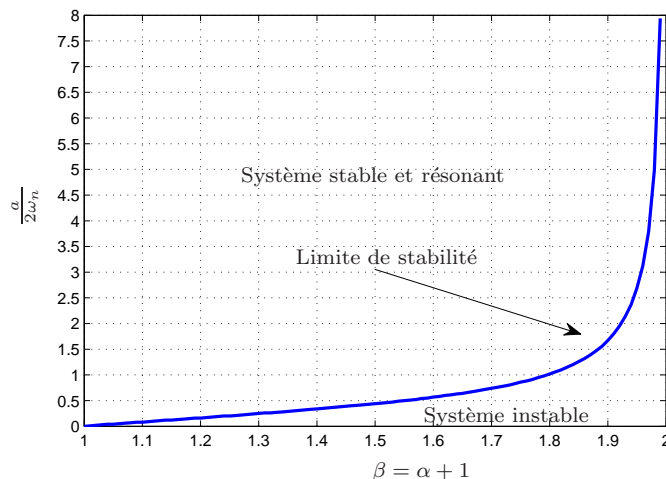


Figure 3.11 – Régions de stabilité et de résonance de la boucle fermée $F(p)$ pour $1 \leq \beta < 2$.

Le système (3.30) est toujours instable pour $a < 0$ et $1 \leq \beta < 2$ ($0 < \alpha < 1$). De ce fait, seulement le cas où $a \geq 0$ est traité dans les paragraphes suivants.

D'après le Théorème (1.5), lorsque $a \geq 0$ et $1 < \beta < 2$, le système en boucle fermée $F(p)$ est stable ssi

$$a^2 \left(a \times \tan \left(\frac{(2 - \beta) \pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(a \times \tan \left(\frac{(2 - \beta) \pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - (k_i b)^2 > 0, \quad (3.31)$$

avec $\beta = \alpha + 1$.

En effet, la région de stabilité du système en boucle fermée est obtenue en fonction des paramètres du régulateur k_i et α .

Ainsi, l'objectif est d'obtenir un système en boucle fermée stable et de vérifier les performances fréquentielles désirées. Pour satisfaire cet objectif, deux étapes de synthèse sont considérées :

- Étapes de stabilisation : la région de stabilisation (k_i, α) est obtenue à travers la relation (3.31)
- Étapes de la synthèse de la commande :
 - déterminer la valeur de l'ordre α à partir des caractéristiques fréquentielles à la résonance du système désiré $F_d(p)$ avec $\xi = \frac{a}{2\omega_n}$ à savoir : le gain en dB et la fréquence à la résonance (figures (2.15) et (2.16)).
 - déterminer la valeur du gain I^α : $k_i = \frac{\omega_n^{\alpha+1}}{b}$.

Exemple

Un procédé réel modélisé par un système de premier ordre avec intégration est considéré pour montrer l'utilité de la méthode de synthèse. Le procédé est un moteur à courant continu dont le modèle mathématique est présenté dans la figure (3.12).

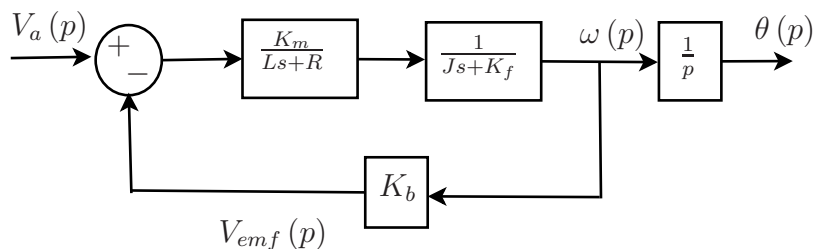


Figure 3.12 – Modèle mathématique d'un moteur à courant continu.

V_a est la tension appliquée, θ est la position angulaire, J est l'inertie de rotor, L et R sont respectivement l'inductance et la résistance de l'armature.

La fonction de transfert du moteur est décrite par

$$G_{DC}(p) = \frac{\theta(p)}{V_a(p)} = \frac{K_m}{p((Lp + R)(Jp + K_f) + K_b K_m)}. \quad (3.32)$$

Pour la plupart des moteurs à courant continu, la constante du temps de l'induit est négligeable. Par conséquent, le modèle mathématique simplifié est de la forme

$$G_{DC}(p) = \frac{\theta(p)}{V_a(p)} = \frac{K_m}{p(R(Jp + K_f) + K_b K_m)} = \frac{K_{DC}}{p(\tau p + 1)},$$

avec K_{DC} et τ représentent respectivement le gain et la constante du temps tels que $K_{DC} = \frac{K_m}{RK_f + K_b K_m}$ et $\tau = \frac{RJ}{RK_f + K_b K_m}$. Les constantes physiques sont fixées à : $R = 6\Omega$, $K_m = K_b = 0.1$, $K_f = 0.2$ Nms et $J = 0.01$ kgm²/p².

La fonction de transfert simplifiée est maintenant donnée par

$$G_{DC}(p) = \frac{0.08}{p(0.05p + 1)}. \quad (3.33)$$

Si on veut comme performances désirées un système non entier en boucle fermée d'ordre $\alpha = 0.4$, un gain à la résonance $G_{dB} = 2.14$ dB et un gain statique nul. Alors, à partir de l'abaque du gain à la résonance (3.13), le pseudo-facteur d'amortissement est fixé à $\xi = 2.5$ pour avoir $G_{dB} = 2.14$ dB (figure (3.13)).

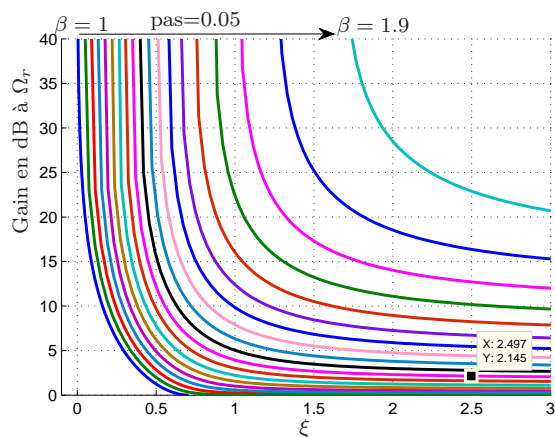


Figure 3.13 – Gain à la résonance du système désiré en fonction de ξ pour $1 \leq \beta < 2$.

De plus, à partir de la relation (3.23), la pulsation propre est obtenue tel que $\omega_n = 4$ rad/s et $k_i = \frac{\omega_n^{\alpha+2}}{b} = \frac{\omega_n^{\beta+1}}{b} = 17.41$. Les paramètres du régulateur sont alors $k_i = 17.41$ et $\alpha = 0.4$.

Les diagrammes de Bode du système en boucle fermée

$$F(p) = \frac{27.85}{p^{2.4} + 20p^{1.4} + 27.85}, \quad (3.34)$$

indiquent que les performances fréquentielles sont vérifiées.

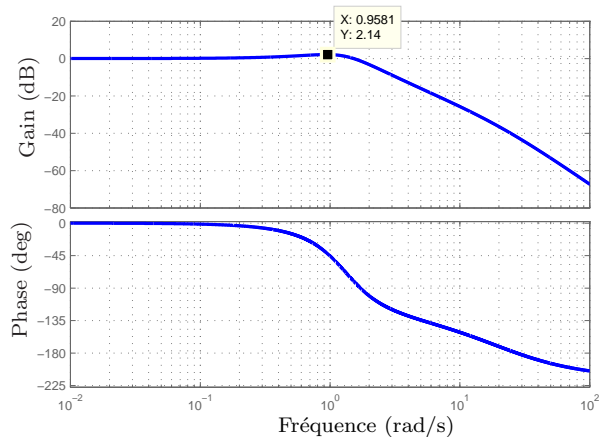


Figure 3.14 – Diagrammes de Bode de la boucle fermée $F(p)$ pour $\alpha = 0.4$.

3.4 Stabilisation des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration

L'objectif de ce paragraphe est de synthétiser un régulateur non entier I^α stabilisant et robuste pour commander les systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration. Le but est alors de déterminer les paramètres stabilisants du régulateur dans le plan (k_i, α) . La stratégie de synthèse utilise le système élémentaire de seconde espèce non commensurable dans la boucle fermée désirée.

3.4.1 Stabilisation d'un système incertain de premier ordre

Pour un système de premier ordre incertain (3.21), la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par

$$F(p) = \frac{k_i \begin{bmatrix} b, \bar{b} \\ - \end{bmatrix}}{p^{\alpha+1} + \begin{bmatrix} a, \bar{a} \\ - \end{bmatrix} p^\alpha + k_i \begin{bmatrix} b, \bar{b} \\ - \end{bmatrix}}, \quad (3.35)$$

avec $b = \begin{bmatrix} b, \bar{b} \\ - \end{bmatrix}$ et $a = \begin{bmatrix} a, \bar{a} \\ - \end{bmatrix}$ sont des intervalles qui décrivent les incertitudes des paramètres du procédé et $0 < \alpha < 2$.

Dans la suite, le Théorème 1.5 est utilisé pour déterminer la région de stabilité robuste du système en boucle fermée (3.35). La proposition (3.1) donne respectivement les limites de stabilité et d'instabilité.

Proposition 3.1 *Lorsque $\bar{a} < 0$ et $0 < \alpha < 1$, le système incertain en boucle fermée (3.35) est robustement stable si l'une des inégalités suivantes est satisfaite*

$$\frac{\left(-\frac{a}{-}\right)^{\alpha+1} \tan^\alpha\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\frac{b}{-} k_i \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1, \quad \frac{\bar{b}}{-} > 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\left(-\frac{a}{-}\right)^{\alpha+1} \tan^\alpha\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{k_i \bar{b}}{-}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1, \quad \frac{\bar{b}}{-} < 0. \quad (3.37)$$

Cependant, le système (3.35) est toujours instable si l'une des inégalités suivantes est

vérifiée

$$\frac{\left(-\bar{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\bar{b} k_i \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1, \quad \bar{b} > 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\left(-\bar{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(k_i \bar{b}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1, \quad \bar{b} < 0. \quad (3.39)$$

Démonstration 3.1 D'après le Théorème 1.5, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $\xi < 0$, le système désiré (3.3) est stable si

$$\frac{-2^{\alpha+1}\xi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \left(-\xi \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^{\alpha} < 1. \quad (3.40)$$

Comme $a = 2\xi\omega_n$ et $bk_i = \omega_n^{\alpha+1}$, la condition de stabilité du système en boucle fermée (3.35) lorsque $a < 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ est donnée par

$$\frac{(-a)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{bk_i \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1. \quad (3.41)$$

La relation (3.41) peut être généralisée au système incertain (3.35). Selon le gain incertain b , l'analyse de stabilité pour $\bar{a} < 0$ est traitée dans la suite.

Lorsque $\bar{a} < 0$ et $\bar{b} > 0$, la fonction de transfert (3.35) est robustement stable si la condition suivante est vérifiée

$$\frac{\left(-\bar{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\bar{b} k_i \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1. \quad (3.42)$$

Cependant, le système en boucle fermée (3.35) est instable si

$$\frac{\left(-\bar{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\bar{b} k_i \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} > 1. \quad (3.43)$$

Les conditions (3.42) et (3.43) représentent respectivement les limites de stabilité robuste et d'instabilité.

Maintenant, lorsque les paramètres incertains du procédé sont négatifs (c-à-d $\bar{b} < 0$ et $\bar{a} < 0$), le système en boucle fermée est robustement stable si la condition suivante est

satisfaite

$$\frac{\left(-\underline{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(k_i \underline{b}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1, \quad (3.44)$$

et il est toujours instable si

$$\frac{\left(-\bar{a}\right)^{\alpha+1} \tan^{\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(k_i \bar{b}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} < 1. \quad (3.45)$$

■

Remarque 3.4 Le cas $\underline{a} > 0$ (c-à-d a est un intervalle positif) est trivial. En effet, le système en boucle fermée (3.35) est toujours stable quelle que soit la valeur de a . Un cas plus intéressant est lorsque le paramètre incertain a peut être positif ou négatif, c'est-à-dire $a = \left[\underline{a} \bar{a}\right]$ avec $\underline{a} < 0$ et $\bar{a} > 0$. Dans ce cas, lorsque $0 < \alpha < 1$, la limite de stabilité peut être déterminée à travers (3.36) ou (3.37).

Exemple

Pour illustrer la proposition (3.1), soit un système incertain de premier ordre décrit par

$$G_1(p) = \frac{[1, 2]}{p + [-4, 3]}. \quad (3.46)$$

Le système incertain en boucle fermée est donné alors par

$$F(p) = \frac{[1, 2] k_i}{p^{\alpha+1} + [-4, 3] p^{\alpha} + [1, 2] k_i}. \quad (3.47)$$

D'après les conditions (3.42) et (3.43), les limites de stabilité et de l'instabilité du système en boucle fermée sont tracées dans la même figure (3.15). Trois régions sont distinguées : la première (Région A) est pour les valeurs (α, k_i) qui donnent un système robustement stable pour toute variation des paramètres a et b ; la deuxième (Région B) représente les valeurs de (α, k_i) qui donnent un système indéterminé c'est-à-dire un système qui peut être stable ou instable et la dernière (Région C) définit un système instable en boucle fermée quelles que soient les valeurs de a et b .

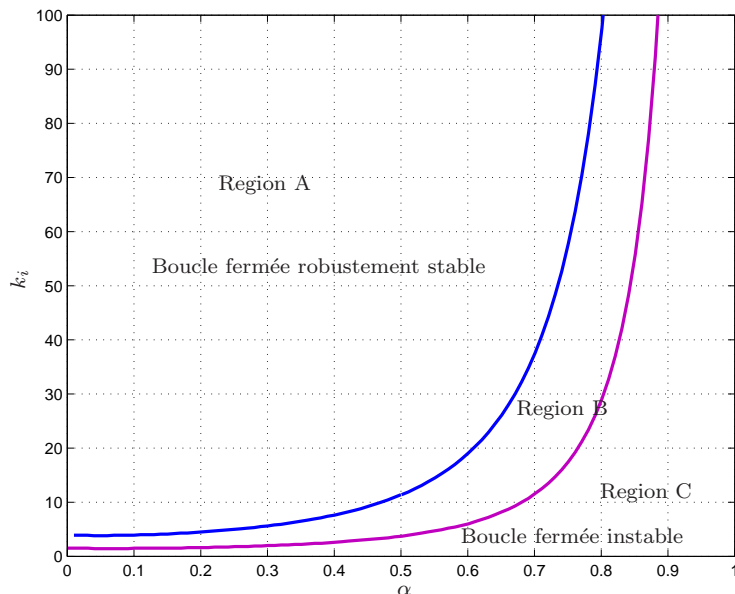


Figure 3.15 – Limites de stabilité et d’instabilité d’un système incertain de premier ordre avec $[b] = [1, 2]$ et $[a] = [-4, 3]$.

Pour que le système en boucle fermée soit stable quels que soient $a \in [-4, 3]$ et $b \in [1, 2]$, le gain k_i est choisi au-dessus de la limite de stabilité pour chaque valeur de α . Par exemple, pour stabiliser le système incertain de premier ordre (3.46), les paramètres du régulateur peuvent être fixés à $\alpha = 0,7$ et $k_i > 37,6$ ($k_i = 50$). Avec ces derniers paramètres, la boucle fermée est robustement stable quelle que soit la valeur de $b \in [1, 2]$ et $a \in [-4, 3]$. Dans le but de vérifier la stabilité du système incertain (3.47), trois cas arbitraires : $a = -4, b = 1$; $a = -2, b = 1$ et $a = 3, b = 1$ sont considérés.

Les boucles ouvertes correspondantes $\beta(s) = \frac{k_i b}{s(s+a)}$ sont tracées dans les diagrammes de Nyquist (figure (3.16)).

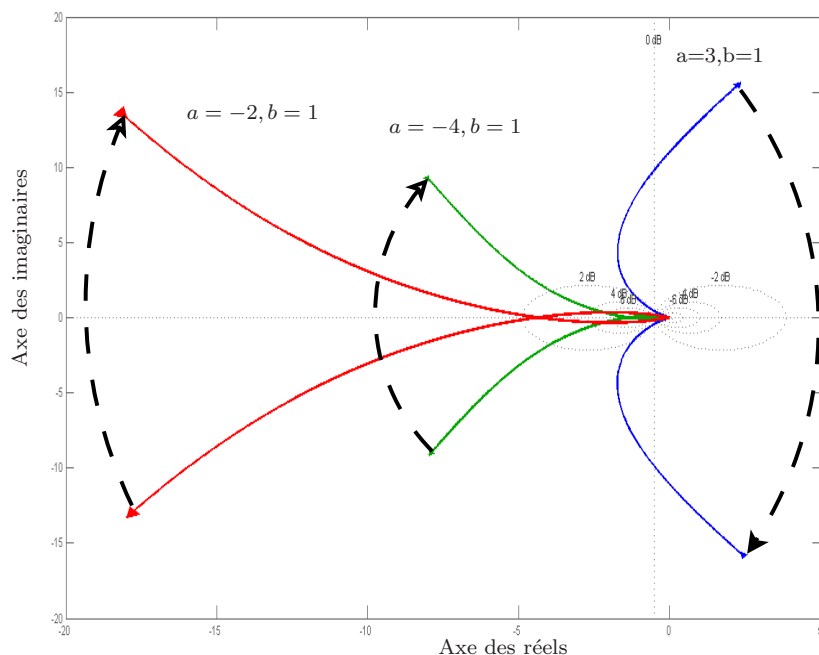


Figure 3.16 – Diagrammes de Nyquist d’un système incertain en boucle ouverte pour différentes valeurs de a .

La figure (3.16) montre que pour les deux premiers cas les diagrammes de Nyquist entourent une seule fois le point critique dans le sens anti-horaire ($N = -1$). De plus, la boucle ouverte admet un pôle instable différent de zéro ($P = 1$). Alors, d’après le critère de Nyquist modifié, le système incertain en boucle fermée est robustement stable ($Z = P + N = 0$). Cependant, pour le dernier cas on a $P = 0$ et le diagramme de Nyquist n’entoure plus le point critique ($N = 0$), alors le système est robustement stable ($Z = P + N = 0$).

3.4.2 Stabilisation d’un système incertain de premier ordre avec intégration

Pour un système incertain de premier ordre avec intégration, la fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{k_i \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \underline{b} \end{bmatrix}}{p^{\beta+1} + \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \underline{a} \end{bmatrix} p^\beta + k_i \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \underline{b} \end{bmatrix}}, \quad (3.48)$$

où $\beta = \alpha + 1$ et $1 < \beta < 2$.

D'après la figure (3.7), lorsque $\bar{a} < 0$ et $1 < \beta < 2$, le système en boucle fermée est toujours instable. De ce fait, l'étude sera limitée au cas $\bar{a} > 0$.

En utilisant le Théorème 1.5, la région de stabilité robuste du système (3.48) peut être déterminée à travers la proposition 3.2.

Proposition 3.2 *Lorsque $\bar{a} > 0$ et $1 < \beta < 2$, le système en boucle fermée (3.48) est robustement stable si l'une des inégalités suivantes est vérifiée :*

- Si $\bar{a} > 0$ et $1 < \beta < 2$, la limite de stabilité au dessus de laquelle le système en boucle fermée (3.48) est robustement stable est définie par l'une des conditions suivantes :

$$\bar{a}^2 \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0, \quad \text{si } \bar{b} > 0, \quad (3.49)$$

$$\bar{a}^2 \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0, \quad \text{si } \bar{b} < 0. \quad (3.50)$$

- Si $\bar{a} > 0$ et $1 < \beta < 2$, la limite d'instabilité au-dessous de laquelle le système en boucle fermée (3.48) est toujours instable est obtenue si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\bar{a}^2 \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0, \quad \text{si } \bar{b} > 0, \quad (3.51)$$

$$\bar{a}^2 \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0, \quad \text{si } \bar{b} < 0. \quad (3.52)$$

Démonstration 3.2 *En utilisant le Théorème 1.5 , une condition suffisante pour la stabilité du système désiré (3.3) lorsque $1 < \beta < 2$ et $\xi > 0$ est donnée par*

$$4\xi^2 \omega_n^2 \omega_u^{2\beta} + \omega_u^{2\beta+2} - \omega_n^{2\beta+2} > 0 \quad \text{avec} \quad \omega_u = 2\xi \omega_n \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right). \quad (3.53)$$

Comme $a = 2\xi \omega_n$ et $bk_i = \omega_n^{\beta+1}$, la condition de stabilité du système en boucle fermée lorsque $a > 0$ et $1 < \beta < 2$ est présentée par

$$a^2 \omega_u^{2\beta} + \omega_u^{2\beta+2} - (bk_i)^2 > 0 \quad \text{avec} \quad \omega_u = a \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right). \quad (3.54)$$

La relation (3.54) peut être généralisée au système incertain (3.48).

Selon le gain b , l'analyse de stabilité pour a positif est traitée dans la suite. Ainsi, pour $1 < \beta < 2$ et $\underline{b} > 0$, le système incertain en boucle fermée admet deux limites de stabilité.

- La première donne la région instable dans laquelle le système en boucle fermée est toujours instable. Elle est obtenue par la condition (3.55) et appelée limite d'instabilité.
- La seconde est obtenue par la condition (3.56). Elle présente la région de stabilité dans laquelle le système en boucle fermée est toujours stable.

$$\underline{a}^{-2} \times \left(\underline{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\underline{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \underline{b} \right)^2 > 0. \quad (3.55)$$

$$\underline{a}^2 \times \left(\underline{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\underline{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \underline{b} \right)^2 > 0. \quad (3.56)$$

Lorsque le gain incertain du système à commander est négatif (c-à-d $\bar{b} < 0$), la limite d'instabilité est donnée alors par

$$\bar{a}^{-2} \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0. \quad (3.57)$$

et la limite de stabilité est décrite par

$$\bar{a}^2 \times \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta} + \left(\bar{a} \times \tan \left(\frac{(2-\beta)\pi}{2} \right) \right)^{2\beta+2} - \left(k_i \bar{b} \right)^2 > 0. \quad (3.58)$$

■

Exemple

Pour montrer l'utilité de la proposition (3.2), soit un système incertain du premier ordre avec intégration donné par :

$$G_2(p) = \frac{[1, 2]}{p(p + [0.5, 3])}. \quad (3.59)$$

Alors, la fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{k_i [1, 2]}{p^{\alpha+2} + p^{\alpha+1} [0.5, 3] + k_i [1, 2]} = \frac{k_i [1, 2]}{p^{\beta+1} + [0.5, 3] p^{\beta} + k_i [1, 2]}, \quad (3.60)$$

où $\beta = \alpha + 1$.

D'après les conditions (3.55) et (3.56), les régions d'instabilité (Région C) et de stabilité (Région A) sont présentées dans la figure (3.17). La région B représente la région indéterminée.

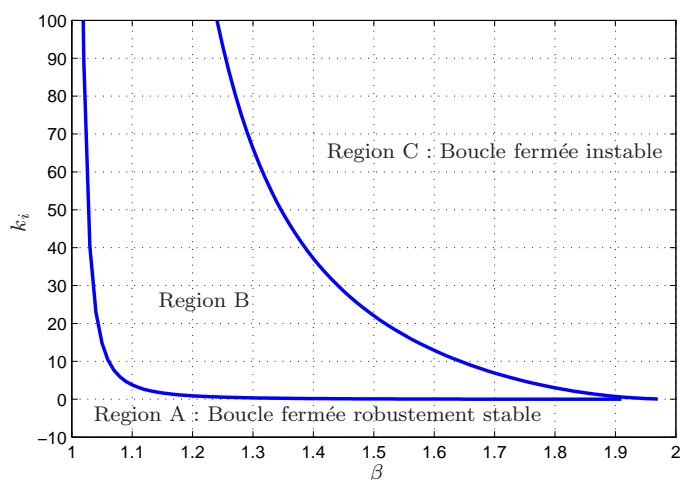


Figure 3.17 – Limites de stabilité et d'instabilité d'un système incertain de premier ordre avec intégration.

Pour stabiliser le système (3.59), l'ordre non entier β peut être choisi $\beta = 1.15$ ($\alpha = 0.15$). D'après les régions de stabilité (figure (3.17)), le gain k_i est choisi dans la région A pour avoir un système en boucle fermée robustement stable. Ainsi, avec $k_i < 1.659$ et $\beta = 1.15$, la boucle fermée (3.60) est robustement stable quel que soit $b \in [1, 2]$ et $a \in [0.5, 3]$.

Dans le but de vérifier la stabilité du système incertain (3.60), quelques valeurs de a et b sont considérées. Les boucles ouvertes correspondantes $\beta(p) = \frac{k_i b}{p^{\alpha+1}(p+a)}$ sont tracées dans les diagrammes de Nyquist (figure (3.18)).

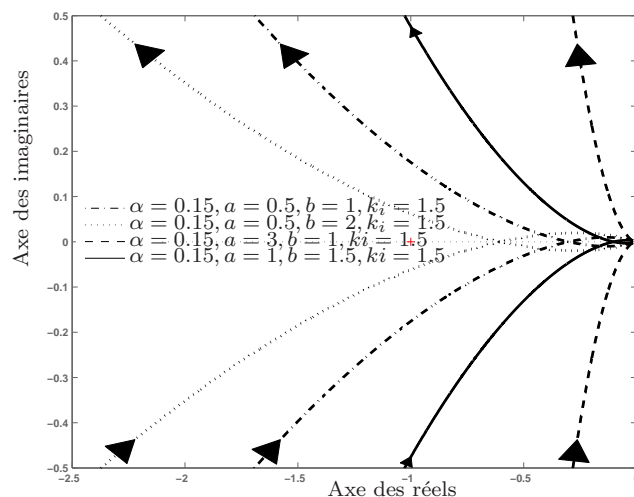


Figure 3.18 – Diagrammes de Nyquist d’un système incertain en boucle ouverte pour différentes valeurs de a et b avec $k_i = 1.5$ et $\alpha = 0.15$.

La figure (3.18) montre que les diagrammes de Nyquist n’entourent plus le point critique ($N = 0$). De plus, le système en boucle ouverte n’admet pas des pôles instables différents de zéros ($P = 0$). Ainsi, d’après le critère de Nyquist modifié, le système incertain en boucle fermée (3.60) est robustement stable ($Z = 0$).

3.5 Commande des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration par un régulateur

I^α

Dans cette section, une commande des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration par un régulateur non entier I^α est effectuée. Le régulateur est utilisé pour avoir une commande robuste en stabilité et de garantir les performances désirées.

3.5.1 Commande d’un système incertain de premier ordre

Soit un procédé de premier ordre décrit par la fonction de transfert (3.61).

$$G(p) = \frac{b}{p + a}, \quad (3.61)$$

où $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ et $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ représentent les paramètres incertains du système.

La fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$C(p) = \frac{k_i}{p^\alpha}. \quad (3.62)$$

Alors, la fonction de transfert en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{bk_i}{p^{\alpha+1} + ap^\alpha + bk_i}. \quad (3.63)$$

L'objectif est d'obtenir un système en boucle fermée robustement stable et de vérifier les performances désirées. Pour satisfaire cet objectif, deux étapes de synthèse sont considérées :

- Étape de stabilisation : comme indiqué précédemment lorsque le paramètre a est incertain, deux cas sont distingués :
 - (i) si $\underline{a} > 0$, le système en boucle fermée est toujours stable ;
 - (ii) si $\overline{a} < 0$, la région de stabilité (k_i, α) est obtenue en utilisant la proposition 3.1.
- Étape de la synthèse de la commande : pour le cas nominal, la synthèse du régulateur se fait à travers les courbes d'iso-dépassement et du temps de réponse minimal (figures (3.19) et (3.20)).

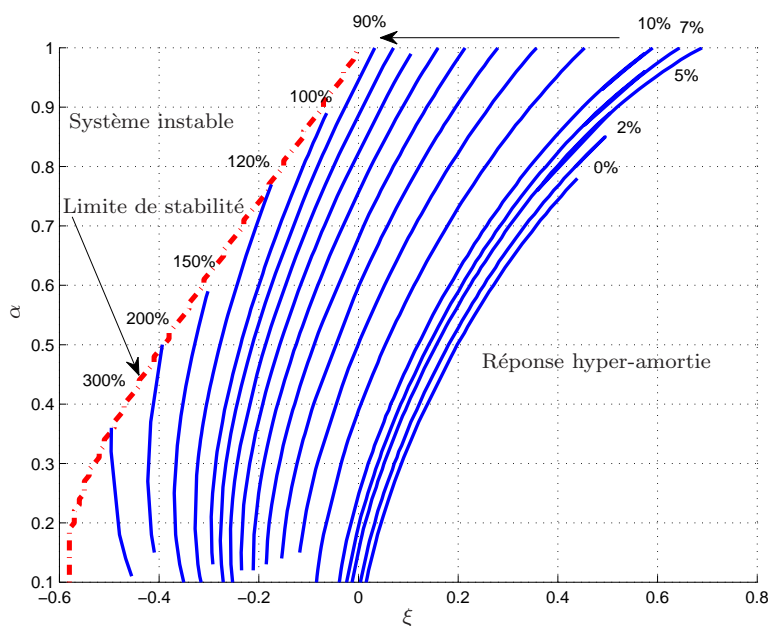


Figure 3.19 – Courbes d'iso-dépassements du système désiré en boucle fermée.

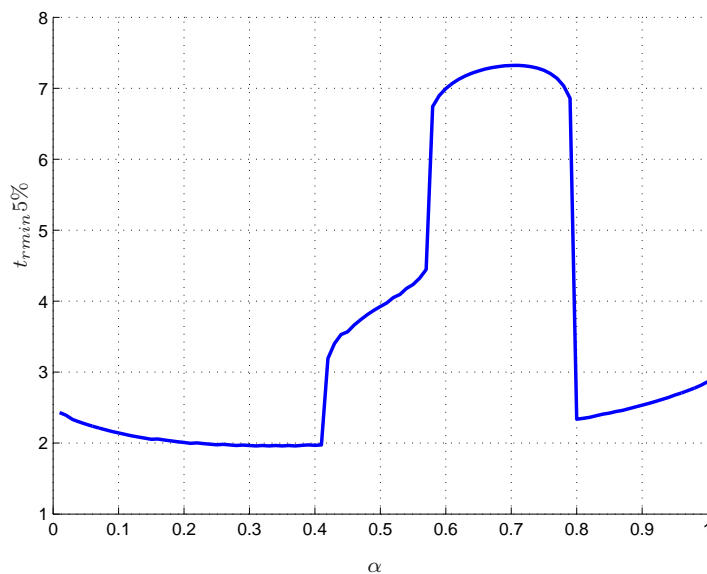


Figure 3.20 – Temps de réponse minimal du système désiré en boucle fermée pour différentes valeurs de α avec $\omega_n = 1$ rad/s.

Pour simplifier l'utilisation des courbes d'iso-dépassements, chaque courbe est approximée par l'équation polynômiale suivante

$$\alpha(\xi, D_1) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=0}^5 (D_1)^{6-i} c_{i,j+1} \xi^{5-j} \quad (3.64)$$

avec D_1 est le premier dépassement en % et les coefficients $c_{i,j+1}$ sont présentés dans le tableau (3.1).

Tableau 3.1 – Coefficients $c_{i,j+1}$ de l'équation polynômiale approximée pour quelques premiers dépassements désirés (0%, 2%, 5%, 7%, 10% et 20%) :

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0.0012	-0.0343	0.0137	6.0908	-50.0713	132.8000
2	-0.0022	0.0736	-0.4896	-4.3728	52.7061	-168.5000
3	0.0011	-0.0365	0.2867	1.3398	-21.1761	82.8400
4	-0.0001	0.0047	-0.0269	-0.3640	4.1752	-21.2400
5	0	0.0001	-0.0043	0.0578	-0.4091	4.3820
6	0	0	0.0001	-0.0012	0.0273	0.0391

Exemple

Pour montrer l'utilité des courbes présentées dans la figure (3.19) et le tableau (3.1), soit

un système incertain de premier ordre décrit par

$$G(p) = \frac{1}{p + [-0.02, 1.1]}. \quad (3.65)$$

Le système nominal est donné par

$$G(p) = \frac{1}{p + 0.9}. \quad (3.66)$$

La fonction de transfert du système nominal en boucle fermée est présentée alors par :

$$F(s) = \frac{k_i}{s^{\alpha+1} + 2 \times 0.45s^{\alpha} + k_i}. \quad (3.67)$$

Les performances désirées de la boucle fermée (3.67) sont :

- une pulsation propre unitaire ;
- un temps de réponse inférieur à 3 secondes ;
- une erreur statique nulle ;
- un premier dépassement au voisinage de 2%.

Pour avoir un système en boucle fermée robustement stable, la proposition 3.1 est utilisée pour déterminer la région de stabilité robuste (figure (3.21)).

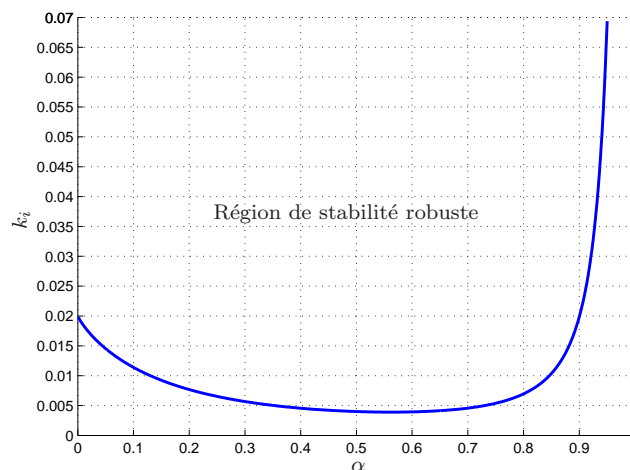


Figure 3.21 – Région de stabilité d'un système incertain en boucle fermée pour $G(p) = \frac{1}{p + [-0.02, 1.1]}$.

D'après la relation (3.23), pour que la pulsation propre soit unitaire, le gain du régulateur est fixé à $k_i = \frac{1}{b}$ ce qui donne un régulateur robustement stable quel que

soit $0 < \alpha < 1$ (figure (3.21)). De plus, pour garantir un premier dépassement $D_1\% \approx 2$ avec $\xi = 0.45$, l'ordre non entier de régulateur peut être déterminé graphiquement à partir de la figure (3.19) et la relation (3.64) : $\alpha = 0.8$. Avec ces paramètres, la figure (3.20) montre que le temps de réponse correspondant est inférieur à 3 secondes.

La fonction de transfert du régulateur est alors donnée par

$$C(p) = \frac{1}{p^{0.8}}. \quad (3.68)$$

La figure (3.22) indique que la réponse indicielle du système nominal en boucle fermée vérifie les performances désirées avec une commande tolérable. De plus, elle donne un système robustement stable.

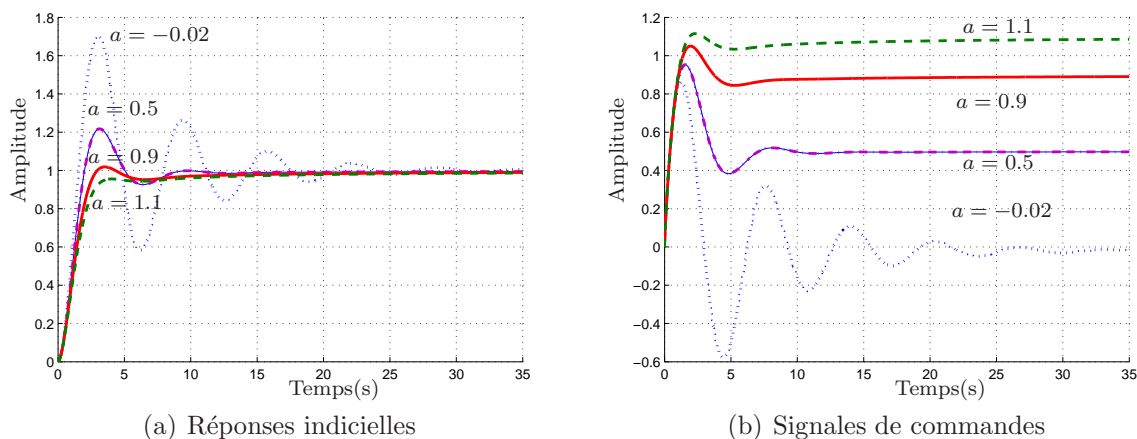


Figure 3.22 – Réponses indicielle et commande du système en boucle fermée.

3.5.2 Commande d'un système incertain de premier ordre avec intégration

Soit un procédé de premier ordre avec intégration décrit par

$$G(p) = \frac{b}{p(p+a)}, \quad (3.69)$$

où b et a sont les paramètres incertains donnés par $[\underline{a}, \bar{a}]$ et $[\underline{b}, \bar{b}]$.

Le système en boucle fermée est donné alors par

$$F(p) = \frac{bk_i}{p^{\alpha+2} + ap^{\alpha+1} + bk_i}. \quad (3.70)$$

Pour déterminer les paramètres du régulateur I^α qui donne un système robustement stable en boucle fermée avec des performances désirées, deux étapes sont considérées lors de la synthèse :

- Étape de stabilisation : lorsque le paramètre a est incertain, deux cas sont distingués :
 - (i) si $0 < \alpha < 1$ et $\bar{a} < 0$, $F(p)$ est toujours instable ;
 - (ii) si $0 < \alpha < 1$ et $\underline{a} > 0$, la région de stabilité (k_i, α) est déterminée en utilisant la proposition 3.2.
- Étape de la synthèse de la commande : En se basant sur les courbes de premier dépassement qui sont déterminées numériquement pour plusieurs valeurs de ξ et $\beta = \alpha + 1$ et tracées ensuite sur la figure (3.23), l'ordre α peut être alors obtenu.

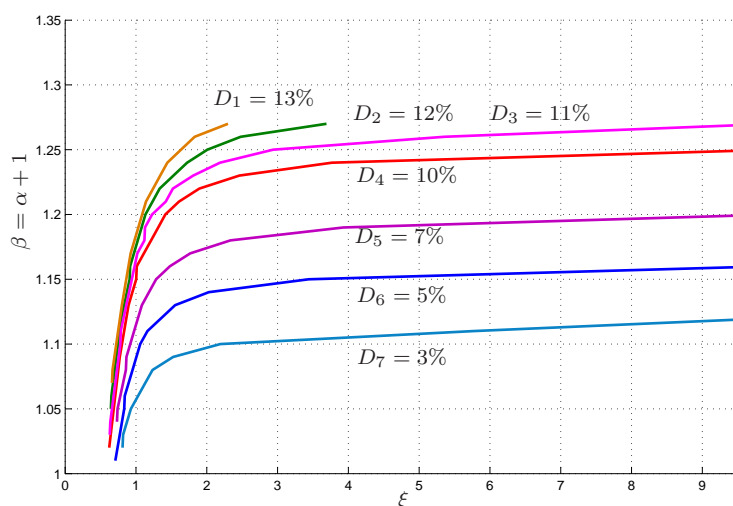


Figure 3.23 – Courbes d'iso-dépassements du système désiré en boucle fermée pour $1 < \beta < 2$ avec $\beta = \alpha + 1$.

Deux stratégies de synthèse sont utilisées dans la suite : la première propose un régulateur robuste qui donne un système en boucle fermée robuste vis à vis des incertitudes, la seconde présente une commande robuste en performances (un premier dépassement constant).

3.5.2.1 Commande robuste d'un système incertain de premier ordre avec intégration

En se basant sur les courbes d'iso-dépassement (figure (3.23)), un tableau de synthèse de l'ordre non entier α est obtenu selon le premier dépassement désiré. Le tableau (3.2) présente quelques cas particulier lorsque le premier dépassement est constant.

Premier dépassement désiré $D_1\%$	$a \geq a_d = 2\xi_d$	$\beta = \alpha + 1$
$\approx 3\%$	$a \geq 4$	1.1
$\approx 5\%$	$a \geq 6$	1.15
$\approx 7\%$	$a \geq 6$	1.19
$\approx 8\%$	$a \geq 5$	1.2
$\approx 10\%$	$a \geq 6$	1.25
$\approx 12\%$	$a \geq 6$	1.27

Tableau 3.2 – Synthèse des paramètres du régulateur avec un premier dépassement désiré.

Exemple

Pour montrer l'utilité de cette méthode, soit un procédé incertain de premier ordre donné par

$$G(p) = \frac{1}{p(p + [6, 20])}. \quad (3.71)$$

La boucle fermée incertain est décrite alors par

$$F(s) = \frac{k_i}{s^{\alpha+2} + [6, 20]s^{\alpha+1} + k_i}. \quad (3.72)$$

Les performances temporelles désirées sont données comme suit

- une pulsation propre unitaire ;
- une erreur statique nulle ;
- un premier dépassement constant au voisinage de 5.

Pour que la pulsation propre soit unitaire, le gain du régulateur est fixé à $k_i = 1$. De plus, pour satisfaire le premier dépassement désiré $D_1\% \simeq 5$, l'ordre α est choisi 0.15 à partir du tableau (3.2) pour $\underline{a} \geq 6$. Ainsi, la fonction de transfert du régulateur est donnée par

$$C(p) = \frac{1}{p^{0.15}}. \quad (3.73)$$

Le système en boucle fermée est décrit alors par

$$F(p) = \frac{1}{p^{2.15} + [6, 20]p^{1.15} + 1}. \quad (3.74)$$

Avec ces paramètres, la condition donnée dans la proposition 3.2 est toujours vérifiée et le système en boucle fermée est robustement stable pour quelques valeurs de a (figure (3.24)). Les réponses indicielles montrent que les performances désirées sont vérifiées avec un pic de commande tolérable.

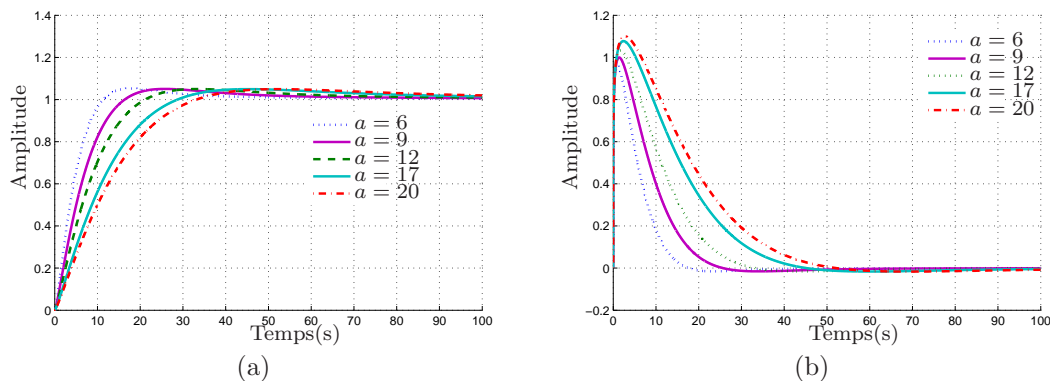


Figure 3.24 – Réponse indicielle et commande du système incertain en boucle fermée avec $\alpha = 0.15$.

Cette méthode est inapplicable lorsque le paramètre a est inférieure aux valeurs indiquées dans le tableau 3.2 (c-à-d $a < a_d$). Pour surmonter ce problème, une commande robuste en performances est développée en utilisant les courbes de la figure (3.23) pour garantir le premier dépassement désiré.

3.5.2.2 Commande robuste en performance d'un système incertain de premier ordre avec intégration

L'objectif principal de cette partie est l'ajustement des paramètres du régulateur k_i et α pour satisfaire le premier dépassement désiré et pour maintenir ensuite la robustesse vis à vis la variation de paramètre a .

La méthode de synthèse est basée sur les courbes d'iso-dépassements du système désiré en boucle fermée (3.3). Ainsi, lorsque le paramètre a ne vérifie pas les conditions présentées dans le tableau (3.2), les courbes peuvent être approximées par l'équation rationnelle (3.75).

$$\beta(\xi) = \frac{l_1\xi^5 + l_2\xi^4 + l_3\xi^3 + l_4\xi^2 + l_5\xi + l_6}{\xi^5 + q_1\xi^4 + q_2\xi^3 + q_3\xi^2 + q_4\xi + q_5}. \quad (3.75)$$

avec les coefficients $l_{\{1,\dots,6\}}$ et $q_{\{1,\dots,5\}}$ dépendent de premier dépassement désiré, et $\beta(\xi) > 1$ avec $\alpha(\xi) = \beta(\xi) - 1$.

Des cas particuliers du premier dépassement désiré sont considérés (tableau (3.3)).

Tableau 3.3 – Coefficients de $\beta(\xi)$ pour quelques premiers dépassements désirés.

Premier dépassement désiré	5%	7%	10%	12%
l_1	1.17	1.207	1.264	1.276
l_2	0.3176	-0.7621	2.036	-0.1629
l_3	0.4598	1.483	-0.1693	0.9327
l_4	0.7669	-0.4287	15.3	0.001694
l_5	0.565	0.4144	-10.15	0.7408
l_6	0.3162	0.04934	6.111	0.1835
q_1	0.3074	-0.5692	1.799	-0.1606
q_2	0.5404	1.169	-0.9634	0.9441
q_3	0.4977	-0.2822	15	-0.09419
q_4	0.3908	0.3234	-11.58	0.4533
q_5	0.5636	0.1181	7.234	0.3849

Exemple

Pour illustrer la méthode proposée, soit un système nominal de premier ordre avec intégration donné par

$$G(p) = \frac{1}{p(p+2)}. \quad (3.76)$$

Les performances désirées de la boucle fermée sont les suivantes :

- une erreur statique nulle ;
- une pulsation propre unitaire ;
- un pseudo-facteur d'amortissement $\xi > 0.707$;
- un premier dépassement constant $D_1\% = 5$.

D'après la relation (3.23), pour que la pulsation propre soit unitaire, le gain du régulateur k_i est fixé à $k_i = 1$. Comme $a = 2\xi$, l'équation (3.75) peut s'écrire alors comme suit

$$\beta\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{l_1\left(\frac{a}{2}\right)^5 + l_2\left(\frac{a}{2}\right)^4 + l_3\left(\frac{a}{2}\right)^3 + l_4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + l_5\left(\frac{a}{2}\right) + l_6}{\left(\frac{a}{2}\right)^5 + q_1\left(\frac{a}{2}\right)^4 + q_2\left(\frac{a}{2}\right)^3 + q_3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q_4\left(\frac{a}{2}\right) + q_5}, \quad (3.77)$$

où les coefficients $l_{\{1,\dots,6\}}$ et $q_{\{1,\dots,5\}}$ sont donnés dans le tableau (3.3).

Ce qui donne, $\beta\left(\frac{a}{2}\right) = 1.08$ et $\alpha\left(\frac{a}{2}\right) = \beta\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 0.08$.

Ainsi, les fonctions de transfert du régulateur et de la boucle fermée sont données respectivement par :

$$C(p) = \frac{k_i}{p^{\alpha\left(\frac{a}{2}\right)}} = \frac{1}{p^{0.08}}, \quad (3.78)$$

$$F(p) = \frac{1}{p^{2.08} + 2p^{1.08} + 1}. \quad (3.79)$$

La réponse indicielle montre que les performances désirées sont vérifiées avec un pic de commande acceptable (figure (3.25)).

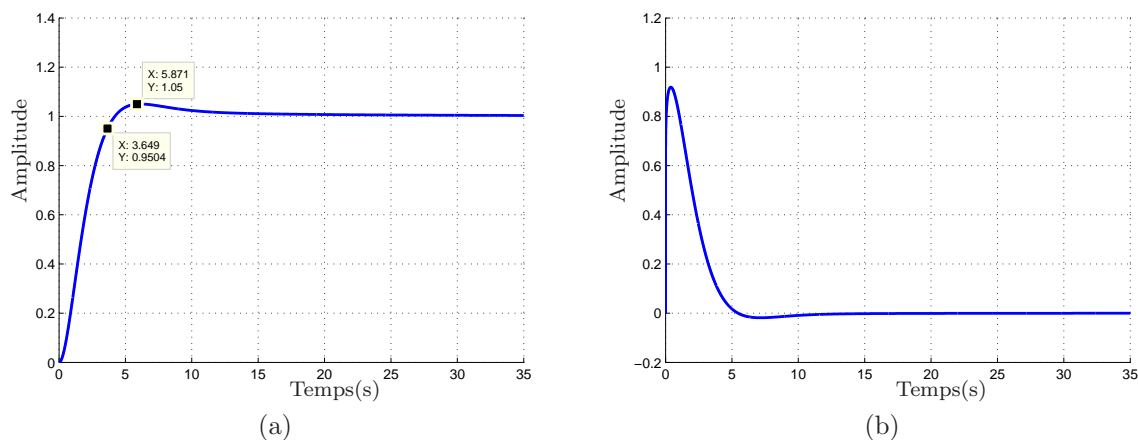


Figure 3.25 – Réponse indicielle et commande du système en boucle fermée.

Dans le cas incertain, après une étape d'identification des paramètres du procédé (a_k et b_k), une commande robuste en performance peut être déterminée. Ainsi, lorsque le gain du régulateur est pris comme l'inverse de gain du système $k_i = \frac{1}{b_k}$ avec ($\xi_k = \frac{a_k}{2}$), l'ordre α est ajusté pour chaque valeur du paramètre a_k à travers la relation (3.80) et le tableau (3.3).

$$\beta_k \left(\frac{a_k}{2} \right) = \frac{l_1 \left(\frac{a_k}{2} \right)^5 + l_2 \left(\frac{a_k}{2} \right)^4 + l_3 \left(\frac{a_k}{2} \right)^3 + l_4 \left(\frac{a_k}{2} \right)^2 + l_5 \left(\frac{a_k}{2} \right) + l_6}{\left(\frac{a_k}{2} \right)^5 + q_1 \left(\frac{a_k}{2} \right)^4 + q_2 \left(\frac{a_k}{2} \right)^3 + q_3 \left(\frac{a_k}{2} \right)^2 + q_4 \left(\frac{a_k}{2} \right) + q_5}, \quad (3.80)$$

où $\alpha_k \left(\frac{a_k}{2} \right) = \beta_k \left(\frac{a_k}{2} \right) - 1$.

Exemple

Pour montrer l'utilité de cette approche, soit un procédé incertain de premier ordre avec intégration décrit par :

$$G(p) = \frac{[0.6, 10]}{p(p + [1.5, 7])}. \quad (3.81)$$

Avec les mêmes performances désirées, le gain du régulateur est fixé à $k_i = 1$ pour avoir une pulsation propre unitaire. Les coefficients de l'ordre non entier α_k (tableau (3.3)) sont choisis pour garantir un premier dépassement constant $D_1\% = 5$. Le système en boucle fermée est de la forme

$$F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+2} + [1.5, 7] p^{\alpha+1} + 1}. \quad (3.82)$$

Les réponses indicielles du système (3.82) vérifient les performances désirées (figure (3.26)).

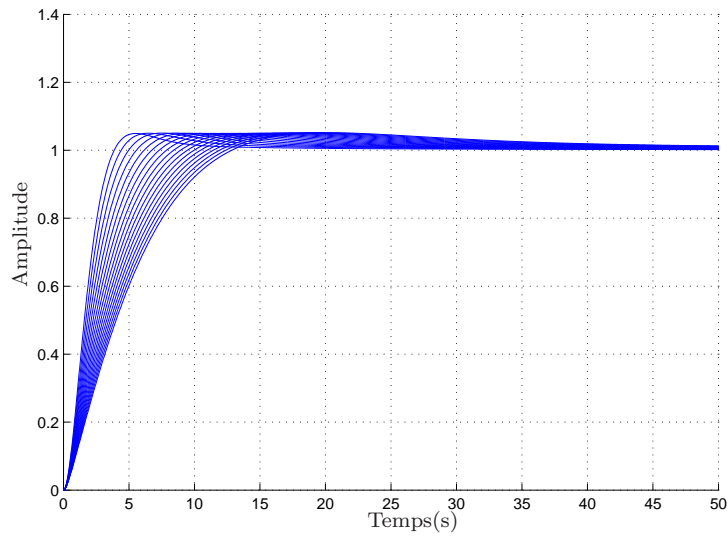


Figure 3.26 – Réponses indicielles du système incertain en boucle fermée pour différentes valeurs de $a \in [1.5, 7]$ avec $D_1 = 5\%$.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté notre approche basée sur les systèmes élémentaires d'ordre non entier pour la commande. Une nouvelle méthode de stabilisation robuste et de commande d'un système incertain de premier ordre avec et sans intégration est proposée. En effet, des expressions analytiques sont déterminées pour décrire la région de stabilité robuste en fonction des paramètres du régulateur I^α . De plus, les abaques des spécifications temporelles du système élémentaire de seconde espèce non commensurable sont utilisés pour synthétiser une commande robuste en stabilité et en performance. Des exemples illustratifs valident l'approche proposée.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire nous avons analysé les systèmes élémentaires d'ordre non entier en termes de stabilité et de résonance. Ces caractéristiques intrinsèques sont étudiées en déterminant les conditions de stabilité et de résonance en fonction de pseudo-facteur d'amortissement et de l'ordre non entier. Des nouveaux abaques des spécifications temporelles et fréquentielles sont établis. Ils sont exploités pour la commande des systèmes. Ce mémoire contient essentiellement deux grandes parties :

- étude fréquentielle et temporelle des systèmes élémentaires en termes de stabilité et de résonance ainsi que l'effet des pôles sur ses comportements ;
- application à la commande des systèmes certains et incertains de premier ordre avec et sans intégration.

Le rapport est organisé en trois chapitres.

Le chapitre 1 présente les principaux outils utilisés dans le domaine des systèmes non entiers. Les différentes définitions des opérateurs de dérivation et d'intégration non entiers et les formes de représentation des systèmes non entiers sont rappelées. Puis, une contribution est présentée. Elle consiste à établir la condition de stabilité du système élémentaire de seconde espèce non commensurable (système de dimension 2 non commensurable) en fonction de l'ordre non entier α et le pseudo-facteur d'amortissement ξ . Une limite de stabilité dans le plan (ξ, α) est donnée.

Le chapitre 2 présente les principales contributions fondées sur l'étude des systèmes élémentaires de dimension 1 et 2 commensurables et non commensurables. Les conditions de résonances des systèmes de dimension 2 sont établies en fonction de l'ordre non entier et le pseudo-facteur d'amortissement. Les caractéristiques temporelles et fréquentielles sont analysées. Pour le système de dimension 2 non commensurable, des nouveaux abaques des principales caractéristiques sont établis en fonction du pseudo-facteur d'amortissement ξ pour différentes valeurs de α . Ces abaques permettent d'en déduire les paramètres d'une

fonction de transfert élémentaire non entière à partir des performances temporelles et fréquentielles désirées. L'effet des pôles sur les comportements des systèmes de dimension 1 et 2 commensurables est étudié. De plus, les paramètres optimaux fournissant le temps de réponse minimal sont déterminés.

Le chapitre 3 présente une nouvelle approche du synthèse de régulateurs à travers l'analyse du comportement de la boucle fermée non entière. Le régulateur est établi directement à partir de l'expression de la boucle fermée sans avoir recours à la boucle ouverte. Pour atteindre cet objectif, les caractéristiques temporelles et fréquentielles de la fonction de transfert élémentaire non entière sont utilisées. Cette méthode est utilisée pour la stabilisation robuste et la commande des systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration. Les courbes d'iso-dépassement et du temps de réponse minimal sont utilisées pour générer une commande robuste avec des spécifications désirées. Des simulations numériques valident les différentes approches proposées.

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

La première perspective consiste à faire l'analyse fréquentielle et temporelle des systèmes élémentaires avec des paramètres variables dans le temps.

La deuxième perspective consiste à étendre la fonction de transfert élémentaire de seconde espèce non commensurable à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle et faire ensuite l'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de seconde espèce non commensurable à partir de données fréquentielles. Une application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un réservoir sphérique peut être effectuée.

La troisième perspective consiste à faire l'étude fréquentielle et temporelle des systèmes élémentaires d'ordre non entier avec retard pour la commande des systèmes avec retard.

La quatrième perspective consiste à améliorer la méthode de simulation "Gruinwald", en agissant sur la période d'échantillonnage, pour diminuer le temps de convergence d'un système non entier avec un ordre $0 < \alpha < 1$.

En effet, il est important d'améliorer les méthodes de simulation des systèmes non entiers pour mettre en œuvre des périodes d'échantillonnage variables. Les systèmes non entiers se caractérisent par leur large distribution de dynamique. Ainsi, les méthodes à période d'échantillonnage fixe ne sont pas adaptées.

L'un des problèmes, qui reste ouvert, est l'analyse et la commande des systèmes LPV non entiers. Ces derniers sont naturellement très rencontrés soit dans le cas du procédé à commander qui est LPV soit le cas de changement (adaptation) des régulateurs. Dans les deux cas, en plus des problèmes de stabilité qui peuvent survenir, l'effet des conditions initiales est peut analysé. En effet, il est montré que les conditions initiales, lorsqu'elles ne sont pas nulles, du système non entier affectent considérablement le transitoire de la dynamique. Une perspective intéressante serait de traiter les systèmes LPV non entiers avec les outils ensemblistes en encadrant les variations paramétriques dans des ensembles (intervalles). Il convient alors de proposer des outils et des abaques pour l'analyse temporelle et fréquentielle des systèmes ensemblistes.

Bibliographie

- [Amairi *et al.*, 2014] AMAIRI, M., AOUN, M. et SAIDI, B. (2014). Design of robust fractional order pi for fopdt systems via set inversion. *In IEEE Conference on Control Applications (CCA), 2014*, pages 1166–1171. IEEE.
- [Aoun, 2005] AOUN, M. (2005). *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France.
- [Aoun *et al.*, 2007] AOUN, M., MALTI, R., LEVRON, F. et OUSTALOUP, A. (2007). Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation. *Automatica*, 43(9): 1640–1648.
- [Ben Hmed *et al.*, 2015] BEN HMED, A., AMAIRI, M. et AOUN, M. (2015). Stability and resonance conditions of the non-commensurate elementary fractional transfer functions of the second kind. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1):842–865.
- [Ben Hmed *et al.*, 2013] BEN HMED, A., AMAIRI, M., NAJAR, S. et ABDELKRIM, M. (2013). Design of fractional pi controller with guaranteed time and frequency-domain performances. *In 10th International Multi-Conference on Systems Signals and Devices, SSD'2013*, pages 1–6. IEEE.
- [Bonnet, 2000] BONNET, C. Partington, J. (2000). Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. *Systems & Control*, 3(7):167–174.
- [Caputo, 1967] CAPUTO, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent-ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- [Charef et Nezzari, 2011] CHAREF, A. et NEZZARI, H. (2011). On the fundamental linear fractional order differential equation. *Nonlinear Dynamics*, 65(3):335–348.

- [Chen *et al.*, 2014] CHEN, L., HE, Y., CHAI, Y. et WU, R. (2014). New results on stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems. *Nonlinear Dynamics*, 75(4):633–641.
- [Cois, 2002] COIS, O. (2002). *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1, France.
- [Dalir et Bashour, 2010] DALIR, M. et BASHOUR, M. (2010). Applications of fractional calculus. *Appl. Math. Sci*, 4(21):1021–1032.
- [Grünwald, 1867] GRÜNWARD, A. (1867). Über begrenzte derivationen und deren anwendung. *Z. Angew. Math. Phys*, 12:441–480.
- [Hartley et Lorenzo, 1998] HARTLEY, T. T. et LORENZO, C. F. (1998). *A solution to the fundamental linear fractional order differential equation*. NASA Lewis Research Center.
- [Ikeda et Takahashi, 1977] IKEDA, M. et TAKAHASHI, S. (1977). Generalization of routh’s algorithm and stability criterion for non-integer integral system. *In Elecronics and communications in japan*, volume 60, pages 41–50. Technica-John Wiley and Sons, 605 Third Avenue, New York, NY.
- [Khemane, 2011] KHEMANE, F. (2011). *Estimation fréquentielle par modèle non entier et approche ensembliste : application à la modélisation de la dynamique du conducteur*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1, France.
- [Kilbas *et al.*, 2006] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M. et TRUJILLO, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier.
- [Malti *et al.*, 2010] MALTI, R., MOREAU, X. et KHEMANE, F. (2010). Resonance and stability conditions for fractional transfer functions of the second kind. *In New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, pages 429–444. Springer.
- [Malti *et al.*, 2011] MALTI, R., MOREAU, X., KHEMANE, F. et OUSTALOUP, A. (2011). Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions. *Automatica*, 47(11):2462–2467.
- [Malti *et al.*, 2008] MALTI, R., VICTOR, S. et OUSTALOUP, A. (2008). Advances in system identification using fractional models. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 3(2):020201–1.

- [Matignon, 1996] MATIGNON, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *In Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 963–968.
- [Matignon, 1998] MATIGNON, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *In Proceedings of Fractional Differential Systems Models, Methods and Applications*, volume 5, pages 145–158.
- [Matignon et d'Andréa Novel, 1996] MATIGNON, D. et d'Andréa NOVEL, B. (1996). Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *In CESA'96 IMACS Multiconference : computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 952–956. Citeseer.
- [Miller et Ross, 1993] MILLER, K. S. et ROSS, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley New York.
- [Monje *et al.*, 2008] MONJE, C., VINAGRE, B., FELIU, V. et CHEN, Y. (2008). Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice*, 16(7):798–812.
- [Moze *et al.*, 2005] MOZE, M., SABATIER, J. et OUSTALOUP, A. (2005). Lmi tools for stability analysis of fractional systems. *In ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 1611–1619. American Society of Mechanical Engineers.
- [Nyquist, 1932] NYQUIST, H. (1932). Regeneration theory. *Bell system technical journal*, 11(1):126–147.
- [Oldham et Spanier, 1974] OLDHAM, K. B. et SPANIER, J. (1974). *The fractional calculus*. Academic Press New York.
- [Oustaloup, 1983] OUSTALOUP, A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Ed Masson.
- [Oustaloup, 1991] OUSTALOUP, A. (1991). *La commande CRONE*. Hermès.
- [Oustaloup, 1995] OUSTALOUP, A. (1995). *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris.
- [Panagopoulos *et al.*, 2002] PANAGOPOULOS, H., ASTROM, K. et HAGGLUND, T. (2002). Design of pid controllers based on constrained optimization. *IEEE*, 149(1):32–40.

- [Podlubny, 1999] PODLUBNY, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic press, New York.
- [Ramasamy et Sundaramoorthy, 2008] RAMASAMY, M. et SUNDARAMOORTHY, S. (2008). Pid controller tuning for desired closed-loop responses for siso systems using impulse response. *Computers and Chemical Engineering*, 32(8):1773–1788.
- [Riemann, 1876] RIEMANN, B. (1876). Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation. *Gesammelte Werke*, 62:331–344.
- [Rivero et al., 2013] RIVERO, M., ROGOSIN, S. V., MACHADO, J. et TRUJILLO, J. J. (2013). Stability of fractional order systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013:1–14.
- [Sabatier et al., 2007] SABATIER, J., AGRAWAL, O. P. et MACHADO, J. T. (2007). *Advances in fractional calculus : theoretical developments and applications in physics and engineering*. Springer.
- [Sabatier et al., 2006] SABATIER, J., AOUN, M., OUSTALOUP, A., GRÉGOIRE, G., RAGOT, F. et ROY, P. (2006). Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. *Signal processing*, 86(10):2645–2657.
- [Sabatier et al., 2003] SABATIER, J., COIS, O. et OUSTALOUP, A. (2003). Modal placement control method for fractional systems : application to a testing bench. *In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference ASME 2003*, pages 633–639. American Society of Mechanical Engineers.
- [Sabatier et al., 2012] SABATIER, J., FARGES, C., MERVEILLAUT, M. et FENETEAU, L. (2012). On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European journal of control*, 18(3):260–271.
- [Sabatier et al., 2013] SABATIER, J., FARGES, C. et TRIGEASSOU, J.-C. (2013). A stability test for non-commensurate fractional order systems. *Systems & Control Letters*, 62(9):739–746.
- [Sabatier et al., 2010] SABATIER, J., MOZE, M. et FARGES, C. (2010). Lmi stability conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1594–1609.

- [Saidi *et al.*, 2015] SAIDI, B., AMAIRI, M., NAJAR, S. et AOUN, M. (2015). Bode shaping-based design methods of a fractional order pid controller for uncertain systems. *Nonlinear Dynamics*, 80(4):1817–1838.
- [Samko *et al.*, 1993] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A. et MARICHEV, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives : theory and applications. *New York : Gordon and Breach*.
- [Trigeassou et Maamri, 2009] TRIGEASSOU, J. et MAAMRI, N. (2009). A new approach to the stability of linear fractional systems. *In 6th International Multi-Conference on Systems Signals and Devices SSD'09*, pages 1–14. IEEE.
- [Vinagre *et al.*, 2002] VINAGRE, B. M., MONJE, C. et CALDERON, A. (2002). Fractional order systems and fractional order control actions. *In IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2550–2554.
- [Whiteley, 1947] WHITELEY, B. A. (1947). Fundamental principles of automatic regulators and servo mechanisms. *Journal of the Institution Electrical Engineers-Part IIA : Automatic Regulators and Servo Mechanisms*, 94(1):5.
- [Yakoub *et al.*, 2015] YAKOUB, Z., AMAIRI, M., CHETOUI, M. et AOUN, M. (2015). On the closed-loop system identification with fractional models. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(12):3833–3860.
- [Yin *et al.*, 2014] YIN, C., CHEN, Y. et ZHONG, S. m. (2014). Robust stability and stabilization of uncertain fractional-order descriptor nonlinear system. *In World Congress*, volume 19, pages 6080–6085.
- [Zhou *et al.*, 2014] ZHOU, X. F., HU, L. G., LIU, S. et JIANG, W. (2014). Stability criterion for a class of nonlinear fractional differential systems. *Applied Mathematics Letters*, 28:25–29.

Bibliographie de l'auteur

Publication dans des revues internationales

[1] **Ben Hmed**, A., Amairi, M. et Aoun, M. (2015a). Stability and resonance conditions of the non-commensurate elementary fractional transfer functions of the second kind. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, 22(1) :842-865.

[2] **Ben Hmed**, A., Amairi, M. et Aoun, M. (2016). Robust stabilization and control using fractional order integrator. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications.

Communication dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture

[1] **Ben Hmed**, A., Amairi, M. et Aoun, M. (2015b). Stabilizing fractional order controller design for first and second order systems. In *12th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD)*, 2015, pages 1-6. IEEE.

[2] **Ben Hmed**, A., Amairi, M. et Aoun, M. (2014a). Fractional order controller design using time-domain specifications. In *15th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, 2014 , pages 462-467. IEEE.

[3] **Ben Hmed**, A., Amairi, M., Najjar, S. et Aoun, M. (2014b). Resonance study of an elementary fractional transfer function of the third kind. In *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA)*, 2014 , pages 1-6. IEEE.

[4] **Ben Hmed**, A., Amairi, M., Najjar, S. et Abdelkrim, M. (2013). Design of

fractional PI controller with guaranteed time and frequency-domain performances. In 10th International Multi-Conference on Systems Signals and Devices, SSD'2013, pages 1-6. IEEE.

Résumé

Le thème général de cette thèse concerne les analyses temporelles et fréquentielles des systèmes élémentaires d'ordre non entier.

Dans un premier lieu, les définitions et les principales propriétés des opérateurs de dérivation et d'intégration non entiers et les différentes méthodes de représentation des systèmes non entiers sont rappelées. Le théorème de stabilité du système élémentaire de seconde espèce non commensurable est établi en fonction de l'ordre non entier et le pseudo-facteur d'amortissement. En second lieu, une analyse fréquentielle et temporelle de différents systèmes élémentaires est effectuée. Des abaques des spécifications temporelles et fréquentielles sont donnés en fonction du pseudo-facteur d'amortissement pour différentes valeurs de l'ordre de dérivation. L'effet des pôles sur les comportements des systèmes élémentaires de première et de seconde espèce est étudié. Les paramètres optimaux fournissant un temps de réponse minimal sont déterminés.

Enfin, une nouvelle approche de synthèse d'un intégrateur non entier stabilisant et robuste pour les systèmes incertains de premier ordre avec et sans intégration est proposée.

Mots clés

System élémentaire d'ordre non entier, stabilité, résonance, commande, régulateur non entier, stabilité robuste, système incertain.

Abstract

This work deals with the frequency-domain and the time-domain analysis of elementary fractional systems.

Firstly, definitions, the main properties of the fractional operators and the different representations of fractional system are given. Stability theorem of the non-commensurate fractional order system is developed in terms of the fractional order and the pseudo-damping factor. Secondly, an overall study of frequency-domain and time-domain performances is done for the different elementary transfer function. Also, frequency-domain and time-domain curves are established in terms of the fractional order and the pseudo-damping factor. The poles effect on the system behavior is treated. In order to obtain a minimum settling time, the optimal parameters are determined. Finally, a new approach based on the elementary transfer function is developed to design a robust stabilizing fractional order integrator for uncertain first order systems with and without integration.

Keywords

Fractional elementary system, stability, resonance, control, fractional regulator, robust stability, uncertain system.