

# THÈSE

*présentée à*

**L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE GABÈS**

*par*

**Haifa ETHABET**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR**

**En Génie Électrique**

---

---

## **SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS INTERVALLES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES À COMMUTATIONS : APPLICATION AU DIAGNOSTIC**

---

---

*Soutenue le 2 Février 2019 devant le jury d'examen composé de :*

M.	Mohamed Naceur ABDELKRIM	Professeur à l'ENIG	<i>Président</i>
M.	Joseph HAGGÈGE	Professeur à l'ENIT	<i>Rapporteur</i>
M.	Mohamed Ali HAMMAMI	Professeur à la FSS	<i>Rapporteur</i>
M.	Messaoud AMAIRI	Maitre de Conférences à l'ENIG	<i>Examineur</i>
M.	Mohamed AOUN	Maitre de Conférences à l'ENIG	<i>Directeur de Thèse</i>
M.	Tarek RAÏSSI	Professeur au CNAM-Paris	<i>Directeur de Thèse</i>

# Dédicace

*Je dédie ce travail à mes très chers parents et grands-parents,*

*Ma sœur,*

*Mon frère,*

*et plus particulièrement à mon cher Abdeladhim.*

# Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été menés au Laboratoire de Recherche Modélisation, Analyse et Commande de Systèmes (LR-MACS) sous la direction de Monsieur **Mohamed AOUN**, Maître de Conférences à l'École Nationale des Ingénieurs de Gabès et la co-direction de Monsieur **Tarek RAÏSSI**, Professeur des Universités au Conservatoire Nationale des Arts et Métiers (CNAM Paris). Cette thèse est co-encadrée par Monsieur **Messaoud AMAIRI**, Maître de Conférences à l'École Nationale des Ingénieurs de Gabès.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse Messieurs **Mohamed AOUN** et **Tarek RAÏSSI** pour leurs qualités scientifiques, leurs qualités humaines, leurs disponibilités, leurs nombreux conseils ainsi que pour m'avoir accordé leurs confiances qu'ils m'ont donné. Veuillez trouver ici toute ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier mon co-encadreur Monsieur **Messaoud AMAIRI** pour la qualité et l'intensité de son encadrement, son suivi, ses encouragements et ses conseils judicieux, qui ont contribué efficacement à la réalisation de cette thèse.

J'adresse mes remerciements à Monsieur **Mohamed Naceur ABDELKRIM**, Professeur à l'ENIG, pour avoir accepté d'être le président de Jury de cette thèse.

Que Messieurs **Joseph HAGGÈGE**, Professeur à l'ENIT, et **Mohamed Ali HAMMAMI**, Professeur à la Faculté des Sciences de Sfax, trouvent ici ma profonde gratitude pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail de thèse et d'en être les rapporteurs.

Mes sincère remerciements s'adresse aussi à Monsieur **Messaoud AMAIRI** pour avoir accepté de faire partie de jury de cette thèse en tant qu'examinateur.

Je tiens, aussi, à remercier tous les membres de laboratoire MACS et plus particulièrement Halima, Asma, Thouraya, Manel et Hadile pour leur encouragement et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

Finalement, j'exprime ma profonde gratitude et mes reconnaissances à ma famille, mon fiancé et mes amies Myriam, Fatma et Chaima pour leur soutien moral et leur patience tout au long de ces trois années et sans lesquels je n'en serai pas là aujourd'hui.

# Publications de l'auteur

## Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

[1] **ETHABET, H.**, RABEHI, D., EFIMOV, D., RAÏSSI, T. (2018). Interval estimation for continuous-time switched linear systems. *Automatica*, 90 :230-238.

[2] **ETHABET, H.**, RAÏSSI, T., AMAIRI, M., COMBASTEL, C. & AOUN, M. (2018) : Interval observer design for continuous-time switched systems under known switching and unknown inputs, *International Journal of Control*, DOI : 10.1080/00207179.2018.1490820.

## Conférence dans des congrès internationaux avec comité de lecture

[1] **ETHABET, H.**, RAÏSSI, T., AMAIRI, M. et AOUN, M. (2017). Interval observers design for continuous-time linear switched systems. *21st IFAC World Congress*, pages (50)1 :6259-6264, Toulouse, France, July 2017.

# Table des matières

Introduction Générale	1
-----------------------	---

## Chapitre 1

### Systemes à commutations, diagnostic et observateurs intervalles

1.1	Introduction	5
1.2	Systemes à commutations	6
1.2.1	Contexte et modélisation	6
1.2.2	Modélisation des systemes à commutations	7
1.2.2.1	Approche continue	7
1.2.2.2	Approche discrète	7
1.2.2.3	Approche mixte	7
1.2.3	Analyse de stabilité	8
1.2.3.1	Stabilité au sens classique	9
1.2.3.2	Stabilité au sens de Lyapunov	10
1.2.3.2.1	Fonction de Lyapunov commune	10
1.2.3.2.2	Fonctions de Lyapunov multiples	11
1.2.3.3	Stabilité par temps de séjour	12
1.2.4	Observabilité et observateurs pour des systemes à commutations	13
1.2.4.1	Observabilité au sens classique	13
1.2.4.2	Observabilité des systemes linéaires à commutations	13
1.2.4.2.1	Observabilité par la détermination du sous-espace observable	14
1.2.4.2.2	Observabilité par la détermination du sous-espace inobservable	14
1.2.4.3	Synthèse d'observateurs pour les systemes à commutations	15
1.3	Généralités sur le diagnostic	16
1.3.1	Procédure de diagnostic	17
1.3.1.1	Détection des défauts	17

1.3.1.2	Localisation des défauts . . . . .	17
1.3.1.3	Identification des défauts . . . . .	18
1.3.2	Modélisation des défauts . . . . .	18
1.3.2.1	Modélisation mathématique . . . . .	18
1.3.2.2	Selon le composant affecté . . . . .	19
1.3.2.3	Selon le comportement temporel . . . . .	20
1.3.3	Méthodes de diagnostic . . . . .	22
1.3.3.1	Méthodes sans modèles . . . . .	22
1.3.3.1.1	Analyse spectrale . . . . .	22
1.3.3.1.2	Analyse par ondelettes . . . . .	23
1.3.3.2	Méthodes avec modèles . . . . .	23
1.3.3.2.1	Espace de parité . . . . .	23
1.3.3.2.2	Approche paramétrique . . . . .	23
1.3.3.2.3	Génération et évaluation de résidus par observateurs . . . . .	23
1.4	Observateurs intervalles . . . . .	24
1.4.1	Notions préliminaires . . . . .	24
1.4.2	Définition d'un observateur intervalle . . . . .	24
1.4.3	Observateurs intervalles pour les systèmes LTV . . . . .	25
1.4.4	Observateurs intervalles pour les systèmes LPV . . . . .	27
1.4.5	Relaxation des observateurs intervalles . . . . .	30
1.4.5.1	Observateur intervalle par changement de coordonnées invariant dans le temps . . . . .	30
1.4.5.2	Observateur intervalle par changement de coordonnées variant dans le temps . . . . .	31
1.5	Conclusion . . . . .	33

## Chapitre 2

### Observateurs intervalles pour des systèmes linéaires à commutations

2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Lemmes et définitions préliminaires . . . . .	36
2.3	Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations . . . . .	37
2.3.1	Formulation du problème . . . . .	37
2.3.2	Structure de l'observateur intervalle pour l'estimation d'état . . . . .	38
2.3.3	Exemples numériques . . . . .	42
2.3.3.1	Exemple 1 . . . . .	42
2.3.3.2	Exemple 2 . . . . .	49

2.4	Relaxation des observateurs intervalles . . . . .	50
2.4.1	Formulation du problème . . . . .	50
2.4.2	Transformation de systèmes linéaires à commutations . . . . .	52
2.4.3	Exemple numérique . . . . .	56
2.5	Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations avec temps de séjour moyen . . . . .	60
2.5.1	Formulation du problème . . . . .	60
2.5.2	Structure de l'observateur intervalle . . . . .	61
2.6	Conclusion . . . . .	66

**Chapitre 3**

**Synthèse d'observateur intervalle à entrée inconnue pour les systèmes linéaires à commutations**

3.1	Introduction . . . . .	68
3.2	Formulation du problème . . . . .	68
3.3	Structure de l'observateur intervalle à entrée inconnue . . . . .	69
3.3.1	Découplage de l'entrée inconnue . . . . .	69
3.3.2	Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations . . . . .	71
3.4	Exemple numérique . . . . .	83
3.5	Conclusion . . . . .	88

**Chapitre 4**

**Diagnostic des systèmes linéaires à commutations dans un contexte à erreurs bornées**

4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Notions préliminaires : observateur à grand gain pour la différenciation numérique . . . . .	91
4.3	Détection de défaut pour les systèmes linéaires à commutations . . . . .	92
4.3.1	Formulation du problème . . . . .	92
4.3.2	Synthèse d'observateurs intervalles pour la détection de défauts . . . . .	93
4.3.3	Détection de défaut . . . . .	94
4.3.4	Exemple numérique . . . . .	96
4.4	Isolation de défaut pour les systèmes linéaires à commutations . . . . .	100
4.4.1	Formulation du problème . . . . .	100
4.4.2	Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues . . . . .	100
4.4.3	Isolation de défaut . . . . .	101
4.4.4	Exemple numérique . . . . .	104



4.5	Estimation de défaut pour les systèmes linéaires à commutations . . . . .	110
4.5.1	Formulation du problème . . . . .	110
4.5.2	Exemple numérique . . . . .	114
4.6	Conclusion . . . . .	114
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>116</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

# Liste des figures

1.1	Fonctions de Lyapunov multiples . . . . .	11
1.2	Défaut additif. . . . .	18
1.3	Défaut multiplicatif. . . . .	19
1.4	Emplacement des défauts. . . . .	19
1.5	Défaut brusque. . . . .	21
1.6	Défaut intermittent. . . . .	21
1.7	Défaut graduel. . . . .	22
2.1	Evolution de la première composante de l'état (Cas sans incertitude). . . . .	44
2.2	Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas sans incertitude). . . . .	45
2.3	Evolution de la troisième composante de l'état (Cas sans incertitude). . . . .	45
2.4	Evolution de la première composante de l'état (Cas bruité). . . . .	46
2.5	Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas bruité). . . . .	46
2.6	Evolution de la troisième composante de l'état (Cas bruité). . . . .	47
2.7	Evolution de la première composante de l'état (Cas fortement bruité). . . . .	47
2.8	Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas fortement bruité). . . . .	48
2.9	Evolution de la troisième composante de l'état (Cas fortement bruité). . . . .	48
2.10	Signal de commutation pour l'exemple 1. . . . .	49
2.11	Evolution de la première composante de l'état. . . . .	58
2.12	Evolution de la deuxième composante de l'état. . . . .	58
2.13	Evolution de la troisième composante de l'état. . . . .	59
2.14	Signal de commutation. . . . .	59
3.1	Signal de commutation $\sigma(t)$ . . . . .	86
3.2	Signal de commande $u(t)$ . . . . .	87
3.3	Estimation intervalle de l'état $x$ . . . . .	88

4.1	Évolution de défaut $f(t)$ . . . . .	98
4.2	Signal de commutation. . . . .	98
4.3	Évolution de résidus. . . . .	99
4.4	Schéma généralisé d'isolation de défauts. . . . .	103
4.5	Signal de commutation. . . . .	108
4.6	Résidus résultants de l'observateur intervalle 1. . . . .	109
4.7	Résidus résultants de l'observateur intervalle 2. . . . .	109
4.8	Résidus résultants de l'observateur intervalle 3. . . . .	110
4.9	Les trajectoires supérieure et inférieure de $f$ . . . . .	114

# Notations et Acronymes

## Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension $n$
$t$	Variable temporelle
$I_n$	Matrice d'identité de dimension $n \times n$
$E_p$	Vecteur de dimension $p \times 1$ dont tous ses éléments sont égaux à 1
$ x $	Valeur absolue d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$
$\ x\ $	Norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$
$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice $A$
$A^+$	Matrice définie par $A^+ = \max(0, A)$
$A^-$	Matrice définie par $A^- = A^+ - A$
$\lambda(A)$	Vecteur des valeurs propres de la matrice $A$
$\lambda_{\min}(A)$	Valeur propre minimale de la matrice $A$
$\lambda_{\max}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice $A$
$P \succ 0$	$P$ est définie positive
$P \prec 0$	$P$ est définie négative
$P = P^T$	$P$ est symétrique

## Acronymes

SDH	Système dynamique hybride
LTI	Linéaire invariant dans le temps
LTV	Linéaire variant dans le temps
LPV	Linéaire à paramètres variants
LMI	Inégalité matricielle linéaire
ISS	Stable entrée-état
GS	Schéma généralisé
DS	Schéma dédié
ADT	Temps de séjour moyen
UIO	Observateur à entrées inconnues
SED	Système à événements discrets
RdP	Réseaux de Petri

# Introduction Générale

La croissance des développements technologiques et de la complexité des procédés industriels exige un certain niveau de fiabilité, de sûreté de fonctionnement et de disponibilité. Ainsi, un intérêt très important est accordé à la surveillance et au diagnostic pour atteindre les objectifs. D'une façon générale, les systèmes de surveillance consistent à détecter, à localiser et à identifier les défauts affectant le système [Chen et Patton, 2012]. Ces anomalies mènent le système à un état de fonctionnement avec des performances dégradées. Les méthodes de diagnostic sont très variées dans la littérature. Elles sont classées selon plusieurs types. À l'issue de ces classifications, on distingue des méthodes à base de modèle et d'autres sans modèle. Parmi les méthodes de diagnostic à base de modèle on cite l'approche paramétrique, l'espace de parité, et la génération de résidus. Plus précisément, les algorithmes de surveillance nécessitent une phase de génération suivie d'une étape d'évaluation de résidus, qualifiés d'indicateurs de défauts. Cependant, la génération de ces résidus exige l'utilisation d'un modèle mathématique du système pour calculer l'écart entre les mesures réelles et celles provenant du modèle.

Dans le domaine du diagnostic et de la surveillance, il est primordial de connaître l'état d'un système. Néanmoins, cette condition n'est pas vérifiée pour la plupart des systèmes industriels. Ceci est lié à des raisons économiques, à savoir le coût élevé des capteurs, et aussi à des raisons techniques telles que la précision insuffisante d'un certain nombre de capteurs ou encore leur non-disponibilité. Ainsi, l'état n'est pas complètement accessible à la mesure. Les observateurs d'état ont été introduits dans la littérature pour remédier à ces problèmes. Ils fournissent une estimation complète de l'état à partir des entrées et des mesures. L'estimation d'état constitue alors une étape préliminaire pour la synthèse des méthodes du diagnostic.

Dans un cadre déterministe, Luenberger a développé pour la première fois les observateurs destinés à l'estimation de l'état pour les systèmes linéaires [Luenberger, 1964]. Néanmoins, les processus réels sont souvent soumis à des perturbations. Les alternatives basées sur le filtrage de Kalman fournissent des estimations optimales dans un cadre stochastique [Kalman, 1960]. Depuis, le problème d'observation a été l'objet de travaux d'autres chercheurs dans la littérature. Un observateur à mode glissant est développé pour les systèmes non linéaires dans [Sreedhar *et al.*, 1993]. Les auteurs de [Chen *et al.*, 1996] proposent une méthode de synthèse d'observateur à entrées inconnues pour la détection robuste de défauts. D'autres travaux récents considèrent l'estimation de l'état pour des systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LTI) , des systèmes Linéaires Variants dans le Temps (LTV) [Galván-Guerra *et al.*, 2017, Zhang, 2002], des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV) [Zhang *et al.*, 2016, Xu *et al.*, 2017], des systèmes discrets [Gao *et al.*, 2017, Dinh *et al.*, 2015], etc...

Le problème d'observation devient plus délicat pour les systèmes à commutations. La classe des systèmes à commutations présente une catégorie très importante des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH). Ils sont constitués d'une famille des sous-systèmes, qui sont appelés souvent modes, et une loi de commutation qui gère la commutation entre eux. Les commutations entre les sous-systèmes peuvent être autonomes ou contrôlées. Plusieurs travaux portant sur la modélisation, l'analyse de stabilité, la commande, l'estimation d'état, le diagnostic se sont focalisés sur cette classe des systèmes. Cet intérêt est justifié non seulement par la dynamique combinée, continue et discrète, des systèmes à commutations mais aussi par leur capacité à reproduire la nature de la plupart des systèmes industriels. De nombreux travaux intéressants sont développés pour l'estimation d'état des systèmes à commutations [Tanwani *et al.*, 2013, Petterson, 2005, Birouche *et al.*, 2006]. Par exemple, un observateur à mode glissant est proposé dans [Yang *et al.*, 2017]. Dans [Bejarano et Pisano, 2011, Lin et Gao, 2015, Belkhiat *et al.*, 2011, Van Gorp *et al.*, 2014], l'estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue est considérée. Les auteurs de [Arichi *et al.*, 2015] traitent le problème d'estimation d'état pour les systèmes non linéaires à commutations.

Les systèmes industriels sont souvent affectés par des perturbations et de bruit de

mesure. Parfois, ces incertitudes ne peuvent pas être caractérisées faute de manque d'informations sur leurs natures ou leur comportement temporel. Dans ce cas, les états estimés à travers des observateurs sont erronés. Il en découle que les performances du système de surveillance deviennent dégradées. Une alternative intéressante est l'utilisation des observateurs intervalles. Cette nouvelle approche considère que les perturbations sont inconnues mais bornées et de bornes connues a priori. Les observateurs intervalles permettent de calculer, d'une manière garantie, l'ensemble contenant toutes les valeurs admissibles de l'état compatibles avec les mesures et encadré par les trajectoires supérieure et inférieure à chaque instant. L'estimation d'état dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées a fait l'objet d'intenses recherches dans la littérature [Gouzé *et al.*, 2000, Raïssi *et al.*, 2012a, Chebotarev *et al.*, 2015, Combastel et Raka, 2011, Efimov *et al.*, 2013c, Mazenc et Bernard, 2011, Yousfi *et al.*, 2014].

Les contributions de cette thèse s'inscrivent dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées. Elles sont dédiées au diagnostic des systèmes linéaires à commutations par approche ensembliste. Des techniques d'estimation intervalle pour les systèmes linéaires à commutations sont tout d'abord développées. Ensuite, en se basant sur les observateurs intervalles proposés, des approches ensemblistes pour le diagnostic de cette classe des systèmes sont élaborées.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Le **chapitre 1** permet de définir le contexte général dans lequel s'inscrit cette thèse. Des notions de base sur la modélisation, l'observabilité et l'analyse de stabilité des systèmes à commutations sont premièrement rappelées. Ensuite, les terminologies les plus utilisées dans le domaine du diagnostic sont introduites. La dernière partie présente les différentes approches existant dans la littérature pour la construction des observateurs intervalles.

Le **chapitre 2** aborde le problème d'estimation intervalle pour les systèmes linéaires à commutations. Dans la première partie de ce chapitre, un observateur intervalle, basé sur la structure de Luenberger, est synthétisé tout en vérifiant la positivité de



l'erreur d'observation. Puis, une nouvelle technique est proposée. Elle permet de relaxer les observateurs intervalles. L'idée principale consiste à utiliser des changements de coordonnées qui rendent les erreurs d'observation positives.

La deuxième partie de ce chapitre présente une autre technique d'estimation intervalle. La différence entre les approches développées dans les deux parties est au niveau d'analyse de stabilité des observateurs intervalles. Des résultats de simulation sont présentés tout au long du chapitre.

Le **chapitre 3** traite l'estimation d'état dans le cas où le système linéaire à commutations est soumis à des entrées inconnues. Un observateur intervalle, basé sur la technique de découplage de l'entrée inconnue, est proposé. Deux trajectoires supérieure et inférieure de l'état sont calculées. Ensuite, l'observateur synthétisé permet d'estimer un encadrement garanti de l'entrée inconnue. Un exemple de simulation est présenté pour illustrer la méthode proposée.

Le **chapitre 4** s'intéresse à l'application des observateurs intervalles développés dans le chapitre précédent au diagnostic des systèmes linéaires à commutations. En premier lieu, une méthode ensembliste de détection de défauts est proposée. Deux vecteurs de résidu supérieur et inférieur sont calculés pour indiquer la présence ou l'absence d'un défaut. En second lieu, une technique ensembliste est développée. Elle permet l'isolation de défauts pour les systèmes linéaires à commutations. Finalement, une estimation intervalle du défaut est envisagée. Les approches développées sont illustrées à travers des exemples numériques.

Enfin, la thèse est clôturée par une conclusion générale et quelques perspectives à développer dans les futurs travaux de recherche.

# Chapitre 1

## Systemes à commutations, diagnostic et observateurs intervalles

### 1.1 Introduction

La complexité croissante des systèmes automatisés a impliqué une demande plus forte de la disponibilité et de la sécurité des installations industrielles. Ainsi, atteindre un niveau souhaité de fiabilité et de sécurité est devenu un objectif très important pour les systèmes industriels. Cette fiabilité est assurée lorsque le système est soumis à un minimum de dommage engendré par les défauts. Pour ce faire, des techniques de détection de défaut ont été proposées dans la littérature [Zolghadri, 2012, Zhang et Yang, 2017, Frank et Ding, 1997, Cocquempot *et al.*, 2004, Zhong *et al.*, 2003, Wang et Daley, 1996].

Pour la plupart des systèmes industriels, l'état n'est pas directement accessible. Une estimation de l'état à partir des mesures de l'entrée et de la sortie est alors nécessaire. Toutefois, les mesures sont entachées de bruits de mesure, des incertitudes, des perturbations etc ... Il s'avère souvent difficile de quantifier les perturbations ou de déterminer son comportement temporel. Une alternative intéressante pour remédier à ce problème est l'utilisation des observateurs intervalles dans un contexte à erreurs bornées. Un observateur intervalle fournit à chaque instant, de manière garantie, des trajectoires admissibles supérieure et inférieure encadrant le vrai état du système. Cette nouvelle alternative a attiré l'attention de plusieurs chercheurs [Gouzé *et al.*,

2000, Mazenc et Bernard, 2010a, Efimov *et al.*, 2012b, Chebotarev *et al.*, 2015, Raïssi *et al.*, 2010, Combastel et Raka, 2011, Efimov *et al.*, 2013c, Videau, 2009].

La structure du chapitre s'articule autour de trois axes majeurs : systèmes à commutations ; généralités sur le diagnostic ; et observateurs intervalles.

La première partie définit les systèmes à commutations. Les approches de modélisation de cette classe de systèmes sont présentées. Un intérêt particulier est accordé au développement des outils nécessaires à l'analyse de stabilité, des notions d'observabilité et des techniques de conception d'observateurs pour cette classe de systèmes.

La deuxième partie est consacrée tout d'abord à la présentation des terminologies les plus utilisées dans le domaine du diagnostic. Ensuite, les différents types de modélisation d'un tel défaut sont abordés. Aussi, les principales méthodes de diagnostic sont évoquées.

La troisième partie s'intéresse aux observateurs intervalles, une étape cruciale dans une procédure de diagnostic. Cette partie aborde également le contexte théorique et général dans lequel s'inscrit l'estimation intervalle. Finalement, les techniques de synthèse des observateurs intervalles pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, linéaires variants dans le temps et linéaires à paramètres variants sont rappelées.

## 1.2 Systèmes à commutations

### 1.2.1 Contexte et modélisation

Les systèmes à commutations présentent une classe très importante des systèmes dynamiques hybrides. Ils se composent d'une famille des sous-systèmes, appelés aussi modes, et une loi de commutations qui gère la commutation entre eux. Plusieurs travaux sont développés pour les systèmes à commutations [Djemai et Defoort, 2014]. Ces recherches ont été consacrées à différents domaines allant de la modélisation, de l'étude de la stabilité, de l'étude d'observabilité, de la conception de lois de commande au diagnostic [Djemai et Defoort, 2015, Liberzon, 2012, Hu *et al.*, 2002, Lin et Antsaklis, 2009, Arichi *et al.*, 2015, Belkhiat *et al.*, 2012, Branicky, 1998]. Les systèmes à commutations possèdent deux types de variables d'état : continue et discrète. La dynamique d'un système (état continu) à commutations change d'un intervalle de temps à un autre. Ce changement est régi par une loi de commutation (état discret) qui indique le mode de fonctionnement

actif à chaque intervalle de temps.

Formellement, un système à commutations est défini par :

$$\dot{x}(t) = f_{q(t)}(t, x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $f_i(t, x(t), u(t))$  sont respectivement l'état continu du système, la commande et les champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.  $q(t)$  est constant par morceaux et représente l'indice du mode de fonctionnement actif à l'instant  $t$ .

## 1.2.2 Modélisation des systèmes à commutations

Plusieurs approches sont développées pour modéliser les systèmes à commutations [Kurovsky, 2002, Trabelsi, 2009] : l'approche continue, l'approche discrète et l'approche mixte qui fusionne les deux.

### 1.2.2.1 Approche continue

Dans cette approche, le système est considéré comme un système continu qui présente des discontinuités. Le système peut être modélisé par des équations différentielles régissant les dynamiques continues alors que la dynamique discrète est modélisée par des équations aux différences.

### 1.2.2.2 Approche discrète

Cette approche repose sur les méthodes de modélisation des Systèmes à Évènements Discrets (SED). Parmi ces méthodes on cite l'utilisation des Réseaux de Petri (RdP) hybrides [Arichi *et al.*, 2013, Arichi, 2015].

### 1.2.2.3 Approche mixte

Cette approche fusionne les deux approches continue et discrète. À ce stade, plusieurs méthodes se distinguent :

- **Modélisation par automates hybrides** : l'idée est de combiner un modèle SED avec des équations algèbro-différentielles associées à ses états discrets [Salah, 2009,

Ghomri et Hassane, 2015, Francart et Thirouin, 2005, Batis, 2013].

- **Modélisation par les réseaux de Petri mixtes** : les réseaux de Petri sont utilisés comme un outil de modélisation pour les systèmes dynamiques [Kurovszky, 2002, Batis, 2013, Francart et Thirouin, 2005]. Ils permettent de synchroniser la dynamique continue et la dynamique discrète des systèmes à commutations.

Un réseaux de Petri contient des places continues et discrètes ( C-places et D-places ) ainsi que des transitions continues et discrètes ( C-transitions et D-transitions ) [Cébron, 2000].

### 1.2.3 Analyse de stabilité

D'une manière intuitive, un système ayant un point d'équilibre stable si lorsqu'on l'écarte de ce point d'équilibre il y revient naturellement. L'analyse de stabilité des systèmes à commutations a inspiré plusieurs chercheurs. Deux directions sont envisageables : l'étude de stabilité en temps continu et aussi en temps discret. Tout au long de cette thèse, nous nous intéressons volontairement à l'analyse de stabilité en temps continu.

Soit le système décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.2}$$

où  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction lipschitzienne et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1** [El Hachemi, 2012]

Le point d'équilibre  $x^*$  du système (1.2) est

- stable si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que

$$\|x(0) - x^*\| < \alpha \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0, \tag{1.3}$$

- asymptotiquement stable si  $x^*$  est stable et s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\|x(0) - x^*\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*, \tag{1.4}$$

- globalement asymptotiquement stable si  $x^*$  est stable et  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*, \quad (1.5)$$

- exponentiellement stable s'il existe trois nombre réels positifs  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  et  $\lambda$  tels que  $\forall x(0) / \|x(0) - x^*\| < \alpha$  alors

$$\|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon \|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t}. \quad (1.6)$$

Pour l'étude de stabilité, l'origine est considéré comme point d'équilibre ( $x^* = 0$ ).

Il est intéressant de noter que même si les sous-systèmes d'un système linéaire à commutations sont asymptotiquement stables, le comportement global du système peut être stable ou instable suivant la loi de commutations. Plusieurs outils sont abordés pour l'étude de la stabilité. De ce fait, la stabilité des systèmes à commutations au sens de Lyapunov a fait l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche où plusieurs théorèmes sont élaborés [El Hachemi, 2012, Hetel, 2007, Meghnous, 2013, Birouche, 2006]. La section suivante présente des notions et théorèmes utilisés dans ce contexte.

### 1.2.3.1 Stabilité au sens classique

Soit le système à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases}, q \in \{q_1, \dots, q_N\}, N \in \mathbb{N} \quad (1.7)$$

où  $q_i$  représente le mode actif de fonctionnement.

#### Propriété 1.1 [Jiang et Wang, 2001]

Une fonction  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ .

Une fonction  $\beta(r, s)$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$  si :

- En fixant  $s$ ,  $\beta(\cdot, s)$  est strictement croissante et  $\beta(0, s) = 0$ .
- En fixant  $r$ ,  $\beta(r, \cdot)$  est strictement décroissante et  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow \infty$ .

Les conditions de stabilité asymptotique uniforme globale d'un système à commutations sont définies par :

**Définition 1.2** [*Hespanha et Morse, 1999*]

Soit le système linéaire à commutations (1.7). L'origine  $x = 0$  est dit globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) si

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(\tau)\|, t - \tau), \forall t \geq \tau \geq 0, \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\} \quad (1.8)$$

où  $\beta(.,.)$  est une fonction de classe  $\mathcal{KL}$ .

### 1.2.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov

#### 1.2.3.2.1 Fonction de Lyapunov commune

Une approche très connue pour garantir la stabilité d'un système linéaire à commutations est l'utilisation des fonctions de Lyapunov communes [*Hu et al., 2002*]. L'existence de cette fonction facilite l'analyse de stabilité pour un système linéaire à commutations. Par contre, la recherche de cette fonction s'avère souvent difficile.

#### Définition 1.3

Le système (1.7) possède une fonction de Lyapunov commune à l'origine  $x = 0$  s'il existe une fonction  $V$  continûment différentiable telle que

$$i) V(x) > 0 \forall x \neq 0, V(x_0) = 0$$

$$ii) \|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

$$iii) \frac{\partial V}{\partial x} A_q x(t) < 0, \forall x \neq 0, \forall q$$

#### Théorème 1.1 [*Hu et al., 2002*]

Si les sous-systèmes dans (1.7) possèdent une fonction de Lyapunov commune au point  $x = 0$  de la forme  $V(x) = x^T P x$ , où  $P = P^T \succ 0$ , vérifiant la condition

$$P A_q + A_q P^T \preceq 0, \forall q \quad (1.9)$$

alors, le point d'équilibre  $x = 0$  est GUAS.

### 1.2.3.2.2 Fonctions de Lyapunov multiples

L'existence de la fonction de Lyapunov commune n'est pas toujours garantie. De ce fait, il est possible de chercher des fonctions de Lyapunov individuelles pour chaque sous-système avec des conditions supplémentaires assurant la stabilité du système à commutations.

**Théorème 1.2** [*Liberzon, 2012*]

Soient les fonctions de Lyapunov  $V_q$  avec  $q \in \{q_1, \dots, q_N\}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Ces fonctions correspondent aux sous-systèmes décrits par les matrices  $A_q$ . Considérons le couple des instants de commutation  $(t_i, t_j)$ . Le système commuté est asymptotiquement stable s'il existe  $\gamma > 0$  tel que

$$V_q(x(t_j)) - V_q(x(t_i)) \leq -\gamma \|x(t_i)\|^2, \forall (t_i, t_j), \forall q \in \{q_1, \dots, q_N\} \quad (1.10)$$

Un exemple de fonctions de Lyapunov multiples pour un système asymptotiquement stable à deux modes de commutations est illustré sur la figure 1.1.

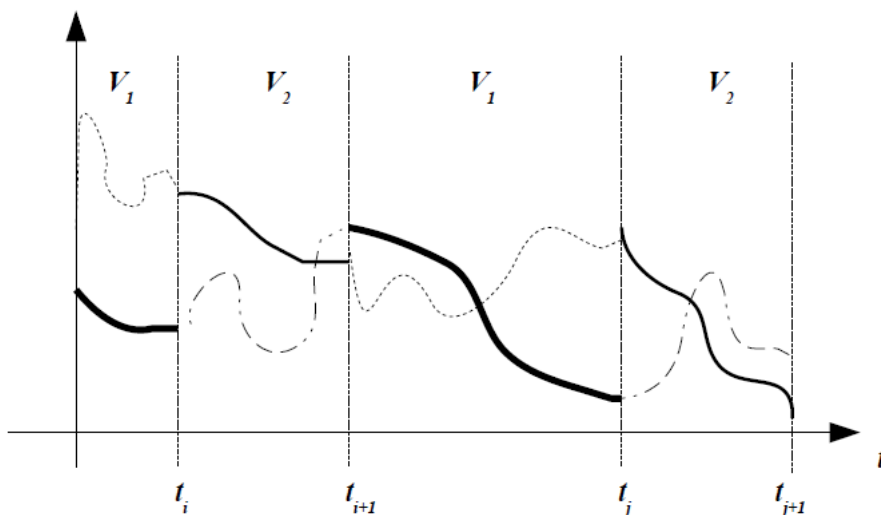


Figure 1.1 – Fonctions de Lyapunov multiples

La valeur de la fonction  $V_2$  à un instant de commutation  $t_i$  donné pour un mode 2 est supérieure à sa valeur à l'instant de commutation  $t_j$  pour le même mode 2.



### 1.2.3.3 Stabilité par temps de séjour

Un système à commutations est stable si le temps de séjour dans un mode est suffisamment long pour que l'état s'approche de zéro [Hetel, 2007, Serres *et al.*, 2011].

Soit  $\Gamma_i(t, \tau)$  la matrice de transition de chaque sous-système  $A_q$ . On suppose que tous les sous-systèmes sont stables, on peut donc déterminer deux constantes  $\mu$  et  $\lambda_0$  tels que

$$\|\Gamma_i(t - \tau)\| < \mu e^{-\lambda_0(t-\tau)} \quad (1.11)$$

La constante  $\lambda_0$  est le taux de décroissance commun pour tous les sous-systèmes.

Les constantes  $\mu$  et  $\lambda_0$  peuvent être déterminées comme suit

$$\lambda_0 = \max(\lambda_q), \quad \mu = \max(\mu_q), \quad q \in \{q_1, \dots, q_N\}$$

avec  $\mu_q$  et  $\lambda_q$  sont des constantes qui définissent la convergence de chaque sous-système  $A_q$ .

#### **Théorème 1.3** [Hetel, 2007]

*Le système (1.7) est asymptotiquement stable avec la marge de stabilité  $\lambda$  si le temps minimum de séjour  $\tau_D$  satisfait la condition*

$$\tau_D \geq \frac{\log \mu}{\lambda_0 - \lambda} \quad (1.12)$$

avec  $\lambda \in (0, \lambda_0)$  quelconque.

Jusqu'à maintenant, les problèmes liés à l'étude de stabilité des systèmes à commutations en temps continu ont été abordés. En outre de l'analyse de stabilité, l'estimation d'état a été largement considérée dans la littérature. Dans ce qui suit, des notions de base d'observabilité pour les systèmes linéaires à commutations seront rappelées.

## 1.2.4 Observabilité et observateurs pour des systèmes à commutations

Généralement, faute de manque des capteurs dans la plupart des procédés réels, seule une partie de l'état dynamique est disponible. Pour remédier à ces limitations, des observateurs d'états peuvent être utilisés. Ils fournissent une estimation des parties non accessibles de l'état.

### 1.2.4.1 Observabilité au sens classique

#### Définition 1.4

*L'étude d'observabilité permet la détermination des conditions pour que l'état  $x(t)$  d'un système soit observable à tout instant à partir de la connaissance des ses entrées et sorties. Elle permet également de savoir si la reconstitution de l'état des mesures est possible ou non.*

Soit un système d'ordre  $n$  défini par sa représentation d'état ci-après :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.13)$$

Le système (1.13) est observable si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (1.14)$$

### 1.2.4.2 Observabilité des systèmes linéaires à commutations

L'observabilité des systèmes linéaires à commutations a fait l'objet de plusieurs recherches dans la littérature [Meghous, 2013, Tanwani *et al.*, 2011, Tian, 2010, Sun *et al.*, 2002].

Soit un système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases}, q \in \{q_1, \dots, q_N\}, N \in \mathbb{N} \quad (1.15)$$

Formellement, la condition d'observabilité d'un système linéaire à commutations est donnée ci-après.

**Définition 1.5** [*Branicky, 1995*]

La séquence de commutations  $\langle T_N \rangle = \{q_1, \dots, q_N\}$  est définie comme la liste ordonnée de  $q$  associée à une trajectoire  $T_N$ .

**Définition 1.6** [*Sun et al., 2002*]

Le système linéaire à commutations (1.15) est observable, s'il existe un instant  $t_1 > 0$  et une séquence de commutations  $\langle T_N \rangle$  tels que l'état initial  $x(t_0)$  peut être déterminé à partir de la sortie  $y(t)$  et de l'entrée  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ .

#### 1.2.4.2.1 Observabilité par la détermination du sous-espace observable

Dans [*Sun et al., 2002*], la dualité entre l'observabilité et l'atteignabilité pour l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires à commutations est étudiée.

**Définition 1.7**  $\Theta = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j$  est appelé le sous-espace observable. Il est donné par :

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \text{Im}C_1^T + \dots + \text{Im}C_N^T \\ \Theta_{j+1} &= \Gamma_{A_1^T} \Theta_j + \dots + \Gamma_{A_N^T} \Theta_j, j = 1, 2, \dots \\ \Gamma_{A_q} \Theta_j &= \Theta_j + A_q \Theta_j + \dots + A_q^{n-1} \Theta_j\end{aligned}$$

où  $\Gamma_{A_q}$  sont les matrices de transition associées à chaque sous-système  $A_q$ .

Si  $\Theta = \mathbb{R}_n$  alors le système à commutations est (complètement) observable.

**Théorème 1.4** [*Sun et al., 2002*]

Soit le système (1.15), les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- Le système est complètement observable
- Le système est complètement déterminable
- $\Theta = \mathbb{R}^n$

#### 1.2.4.2.2 Observabilité par la détermination du sous-espace inobservable

Les travaux de [*Tanwani et al., 2011*] cherchent le sous-espace inobservable du système à commutations.

Le sous-espace inobservable est déterminé par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} N_m^m &= \text{Ker}G_m \\ N_q^m &= \text{Ker}G_q \cap e^{-A_q\tau_q} N_{q+1}^m, 1 \leq q \leq m-1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

où

$$G_q = \begin{pmatrix} C_q \\ C_q A_q \\ \vdots \\ C_q A_q^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

**Théorème 1.5** [Tanwani et al., 2011]

Le système (1.15) est dit observable sur l'intervalle  $[t_1, t_m^+)$  avec la séquence de commutations  $\langle T_N \rangle$  si et seulement si

$$N_1^m = \{0\} \quad (1.18)$$

### 1.2.4.3 Synthèse d'observateurs pour les systèmes à commutations

L'estimation d'état pour les systèmes linéaires à commutations est récemment abordée dans les travaux [Pettersson, 2005, Lian et al., 2011, Tanwani et al., 2013, Van Gorp et al., 2014].

La méthode de synthèse d'un observateur pour les systèmes à commutations proposée dans [Birouche, 2006] est présentée dans cette partie.

Soit le système à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases}, q \in \{q_1, \dots, q_N\}, N \in \mathbb{N} \quad (1.19)$$

Les paires  $(A_q, C_q)$  sont supposées observables pour tout mode  $q$ . L'observateur associé au système (1.19) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_q \hat{x}(t) + B_q u(t) + L_q (y(t) - C_q \hat{x}(t)) \\ y(t) = C_q \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $L_q$  est le gain d'observateur associé au mode  $q$  et  $\hat{x}$  est l'estimé du vecteur d'état  $x$ .

Soit l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Sa dynamique est décrite par :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A_q - L_q C_q) e(t)\end{aligned}\tag{1.21}$$

La stabilité de l'observateur (1.20) se réduit à la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation. Pour ce faire, une fonction de Lyapunov commune est introduite :

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t)\tag{1.22}$$

où  $P = P^T$  est une matrice définie positive.

La condition de convergence de l'erreur est équivalente à

$$\dot{V}(e(t)) < 0, \forall t \geq t_0.\tag{1.23}$$

Ce qui implique que les gains  $L_q$  sont calculés tels que

$$(A_q - L_q C_q)^T P + P (A_q - L_q C_q) < 0\tag{1.24}$$

Comme nous l'avons montré, les systèmes à commutations sont largement étudiés partant de la modélisation, allant de l'analyse de stabilité à l'étude d'observabilité. Les chercheurs ne se sont pas limités à résoudre seulement ces problèmes mais ils ont également investigué cette classe des systèmes dans d'autres domaines à savoir le domaine du diagnostic. Étant une des thématiques évoquées dans ce mémoire, il serait primordial d'introduire tout d'abord quelques généralités sur le diagnostic et détailler les différentes méthodes du diagnostic utilisées dans la littérature.

### 1.3 Généralités sur le diagnostic

Le comité technique SAFEPROCESS de l'IFAC (International Federation of Automatic Control) a standardisé les définitions nécessaires dans le domaine du diagnostic à cause de l'incohérence de la terminologie utilisée dans la littérature [Isermann et Balle, 1997]. Dans ce contexte, il est également primordial de rappeler quelques définitions préliminaires dans le domaine du diagnostic de défaut.

Les définitions 1.8 et 1.9 permettent de définir respectivement ce qu'est un défaut et une défaillance [Isermann et Ballé, 1996], [Isermann, 2005], [Ding, 2008].

### **Définition 1.8**

*Un défaut est une anomalie ou une déviation non souhaitée d'au moins un paramètre d'un système de son état de fonctionnement normal. Il est important de noter qu'un défaut mène le système à un état de fonctionnement avec des performances dégradées.*

### **Définition 1.9**

*Une défaillance peut être définie comme étant l'inaptitude permanente d'un système à exécuter une tâche désirée dans les conditions fixées. Elle présente alors un état de fonctionnement inacceptable du point de vue performances.*

## **1.3.1 Procédure de diagnostic**

D'une manière générale, le diagnostic a pour objectif de détecter une déviation de fonctionnement sain d'un système vers un fonctionnement anormal. Ainsi, il consiste à déterminer la cause de cette anomalie en localisant l'élément défaillant du système et également la caractériser en terme de degré de sévérité, type, instant d'occurrence etc... La procédure de diagnostic se résume principalement en trois étapes : la détection, la localisation et l'identification du défaut [Frank, 1990a].

### **1.3.1.1 Détection des défauts**

La détection des défauts constitue la première étape dans une procédure de diagnostic. Elle revient à déterminer la présence d'un défaut et donc d'indiquer si un système est défaillant ou non. L'idée intuitive est d'évaluer la non nullité ou la nullité d'un certain résidu (écart entre les mesures et les calculs résultant d'un modèle) pour signaler respectivement la présence ou l'absence d'un défaut. De ce fait, la détection de défaut est alors équivalente à tester si le résidu dépasse un seuil bien déterminé en fonction de l'amplitude des perturbations.

### **1.3.1.2 Localisation des défauts**

La localisation des défauts est appelée aussi isolation. C'est la capacité à retrouver directement l'origine et l'emplacement du défaut ainsi qu'à déterminer l'élément

provoquant la défaillance du système. Cette procédure de localisation nécessite un vecteur de résidus pouvant caractériser de manière unique chaque faute. Cette étape succède systématiquement à la détection des défauts.

### 1.3.1.3 Identification des défauts

L'identification des défauts consiste à déterminer le type, l'élément en défaut et l'instant d'occurrence d'un défaut. Elle vise également à fournir des informations sur les caractéristiques d'un défaut à savoir son degré de sévérité ainsi que son évolution en fonction du temps.

## 1.3.2 Modélisation des défauts

Un défaut peut être caractérisé selon sa modélisation mathématique, selon le composant affecté ou selon son comportement temporel.

### 1.3.2.1 Modélisation mathématique

Les défauts peuvent être classifiés en deux catégories, selon la façon dont ils sont modélisés, comme suit :

#### - Défaut additif :

Un défaut additif affecte l'entrée ou la sortie du système. Il peut être modélisé par un terme additif au modèle comme le montre la figure 1.2 où  $y_s$ ,  $f$  et  $y_f$  sont respectivement le signal sain, le défaut et le signal défectueux. Ce type de défaut n'a aucune influence sur la structure du système [Isermann *et al.*, 2002].

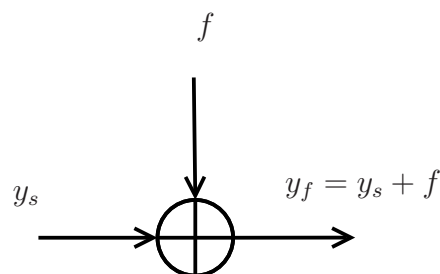


Figure 1.2 – Défaut additif.

#### - Défaut multiplicatif :

Un défaut multiplicatif est modélisé par un terme multiplicatif qui engendre des

erreurs au niveau des paramètres du modèle du système [Isermann *et al.*, 2002]. Contrairement au défaut additif, le défaut multiplicatif affecte la structure du système tout en changeant ses paramètres. La modélisation de ce type de défaut est expliquée par la figure 1.3 où  $U$ ,  $f$  et  $y_f$  sont respectivement l'entrée, le défaut, le signal défectueux.

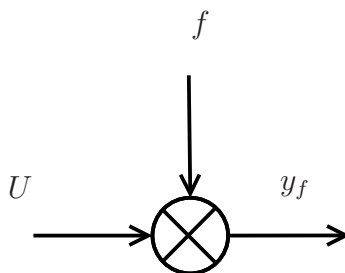


Figure 1.3 – Défaut multiplicatif.

### 1.3.2.2 Selon le composant affecté

Selon son emplacement dans la boucle, le défaut peut affecter les actionneurs, le processus et/ou les capteurs [Blanke *et al.*, 2006]. Il en découle que le défaut est classé en trois types comme illustré sur la figure 1.4.

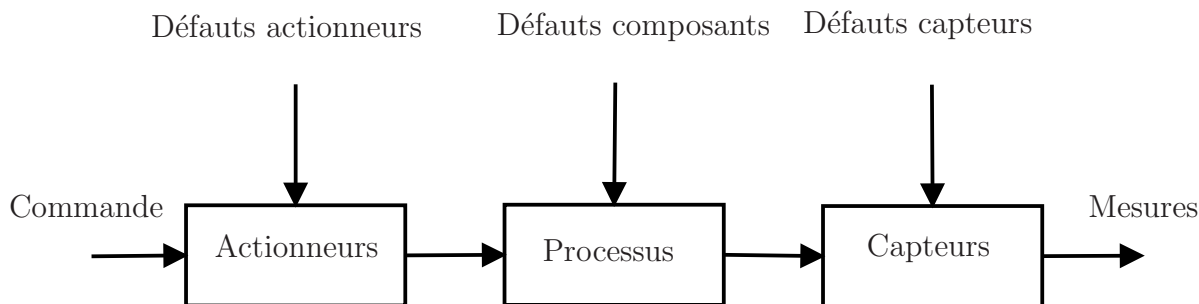


Figure 1.4 – Emplacement des défauts.

#### - Défaut actionneur :

Un défaut actionneur agit au niveau de la partie opérative et détruit le signal d'entrée d'un système. Les répercussions des défauts actionneurs varient d'un système à un autre selon le degré d'influence du défaut [Blanke *et al.*, 2006, Staroswiecki et Gehin, 2001]. Plusieurs types de défauts se distinguent tels que blocage, oscillation, saturation, perte d'efficacité etc ...



**- Défaut composant :**

Un défaut composant affecte les paramètres du système lui même. Il engendre une modification de la dynamique du système suite à un changement du comportement de ces composants [Blanke *et al.*, 2006, Staroswiecki et Gehin, 2001].

**- Défaut capteur :**

Un défaut capteur donne une image erronée de la grandeur physique à mesurer. Ainsi, il peut être vu comme étant l'écart entre la grandeur physique et sa mesure. La présence d'un défaut capteur en boucle fermée affecte le signal de commande et le rend inexact [Blanke *et al.*, 2006, Staroswiecki et Gehin, 2001]. Les défauts capteurs les plus fréquents sont le biais, la dérive, le défaut de calibrage etc...

**1.3.2.3 Selon le comportement temporel**

Une autre classification de défaut selon son évolution dans le temps peut être considérée. Un défaut peut être brusque, intermittent ou graduel [Isermann *et al.*, 2002], [Frank, 1990a].

**- Défaut brusque :**

Le défaut brusque (ou abrupt) se caractérise par un comportement temporel discontinu comme le montre la figure 1.5. Ce type de défauts est relativement facile à le détecter à cause de changement brusque dans l'évolution du système. Il peut engendrer une panne brutale ou un arrêt total. On donne ci-après sa représentation mathématique :

$$f(t) = \begin{cases} \alpha & t > t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.25)$$

avec  $f(t)$ ,  $\alpha$  et  $t_f$  sont respectivement le comportement temporel du défaut, une constante positive et l'instant d'occurrence du défaut.

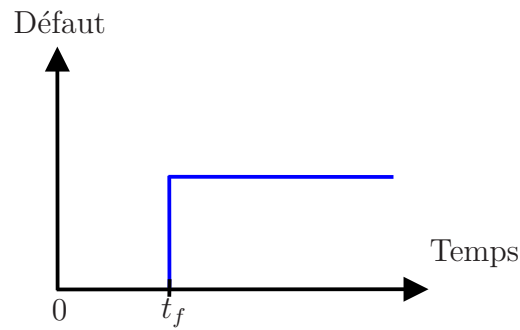


Figure 1.5 – Défaut brusque.

- **Défaut intermittent :**

Le défaut intermittent est un cas particulier de défaut brusque qui apparaît et disparaît rapidement. Plusieurs défauts intermittents se distinguent à savoir une panne intermittente d'un capteur ou les faux contacts etc ...

La figure 1.6 présente l'évolution temporelle d'un défaut intermittent.

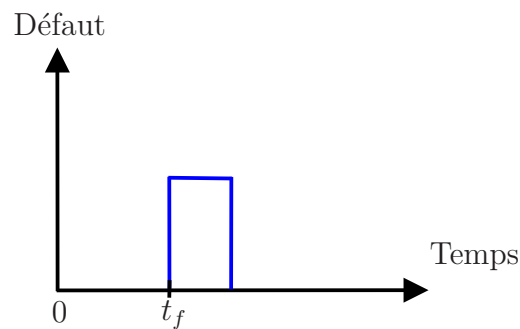


Figure 1.6 – Défaut intermittent.

- **Défaut graduel :**

Le défaut graduel se caractérise par une évolution temporelle lente comme illustré sur la figure 1.7. Il est souvent difficile à détecter car son comportement est similaire à une déviation paramétrique lente d'un procédé [Isermann *et al.*, 2002].

Sa représentation mathématique peut être décrite par :

$$f(t) = \begin{cases} \alpha \left(1 - e^{-\beta(t-t_f)}\right) & t > t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.26)$$

avec  $f(t)$  et  $t_f$  sont respectivement le comportement temporel du défaut et son instant d'occurrence.  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes positives.

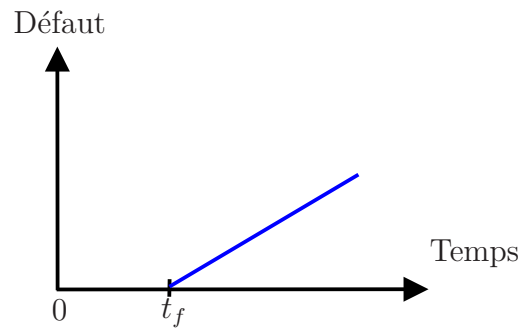


Figure 1.7 – Défaut graduel.

### 1.3.3 Méthodes de diagnostic

Les méthodes de diagnostic sont nombreuses et très variées. En fait, plusieurs approches sont proposées dans la littérature [Isermann, 1995, Chantier *et al.*, 1998, Pessel *et al.*, 2007, Isermann, 2006]. Deux grandes familles de méthodes de diagnostic sont développées : les méthodes sans modèles, qui ne nécessitent pas une connaissance approfondie du processus réel, et celles à base de modèles nécessitant une connaissance approfondie du processus réel.

#### 1.3.3.1 Méthodes sans modèles

À cause de la complexité des procédés physiques, il est quelquefois difficile d'obtenir un modèle du système en question. Dans ce cas, on a recours aux méthodes de diagnostic sans modèle dites aussi méthodes qualitatives. Ces méthodes reposent sur l'apprentissage et le savoir d'experts et nécessitent un ensemble de données historiques dans les deux modes de fonctionnement normal et défaillant du système. Il convient de citer ici deux outils d'analyse.

##### 1.3.3.1.1 Analyse spectrale

Elle est appelée aussi analyse fréquentielle. Elle est considérée lorsque l'analyse temporelle de certains processus réels devient délicate. Cette méthode est utilisée pour la détection des défauts dans les systèmes ayant un spectre typique de fréquence. Dans ce cas, l'anomalie est définie comme étant toute déviation des propriétés fréquentielles d'un signal [Basseville, 1988, Basseville, 1997].

### 1.3.3.1.2 Analyse par ondelettes

La méthode de décomposition en ondelettes est consacrée aux signaux à différentes échelles. Elle permet de concentrer l'information dans des coefficients qui indiquent l'occurrence d'un défaut. Cette méthode a été utilisée pour la surveillance des machines-outils dans [Gao et Yan, 2010, Kankar *et al.*, 2013].

### 1.3.3.2 Méthodes avec modèles

Les méthodes de diagnostic à base de modèles ont été proposées dans plusieurs travaux [Isermann et Balle, 1997, Chiang *et al.*, 2000, Patton, 1994]. L'idée fondatrice de ces méthodes se base sur le calcul de l'écart entre les informations issues du système réel et celles provenant de son modèle.

#### 1.3.3.2.1 Espace de parité

Cette approche a pour objectif de vérifier la parité ou la cohérence des informations issues du procédé et les mesures issues des capteurs. Elle est basée sur une projection algébrique et géométrique. L'espace de parité est composé de l'ensemble de valeurs numériques des résidus [Zhong *et al.*, 2015, Gertler, 2015].

#### 1.3.3.2.2 Approche paramétrique

Le principe de l'approche paramétrique repose sur l'estimation des paramètres du système. Ainsi, le vecteur résidu est défini par la différence entre cette estimation et les valeurs issues de l'état normal du processus. Dans cette méthode, le défaut est traduit par la déviation de l'état paramétrique du système. Ainsi, toute déviation paramétrique anormale implique l'occurrence d'un défaut [Jiang *et al.*, 2008, Isermann, 2006].

#### 1.3.3.2.3 Génération et évaluation de résidus par observateurs

L'idée de base de la génération de résidus par observateurs consiste à estimer la sortie du système à partir des mesures accessibles. Ainsi, le vecteur résidu est défini comme étant l'écart entre la sortie mesurée et la sortie estimée. Il est calculé à l'aide de l'erreur d'estimation sur la sortie. Vue la présence des bruits et des incertitudes, le vecteur résidu est souvent non nul en fonctionnement normal. L'étape d'évaluation de résidus succède systématiquement la phase de génération de résidus. Elle consiste à indiquer si le vecteur

résidu dépasse en amplitude un seuil fixe ou adaptatif. Cette étape assure la prise de décision concernant la présence d'un défaut. Cette méthode a fait l'objet de plusieurs recherches récentes [Hammouri *et al.*, 1999, Ding *et al.*, 2002, Jiang et Zhou, 2005, Yan et Edwards, 2007].

À ce stade, nous avons énoncé plusieurs terminologies utilisées dans le domaine du diagnostic. Ainsi nous avons présenté les différents types de défauts, les étapes de la procédure de diagnostic et nous avons clôturé cette partie par présenter quelques approches de diagnostic.

La procédure de diagnostic nécessite à un certain moment l'estimation d'état du système en question. Néanmoins, les processus réels sont souvent soumis à des perturbations. Dans le cas où on ne dispose que des informations sur les bornes de ces perturbations, l'estimation d'état s'avère difficile et donne des estimés erronés. De ce fait, les observateurs intervalles ont été introduit pour remédier à ce problème.

Dans la suite, une étude détaillée sur les observateurs intervalles est introduite pour différentes classes de systèmes.

## 1.4 Observateurs intervalles

### 1.4.1 Notions préliminaires

**Définition 1.10** [Minc, 1988]

Une matrice  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite de type Metzler si tous ses éléments hors diagonale sont positifs ou nuls, i.e.  $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ .

### 1.4.2 Définition d'un observateur intervalle

Cette section présente la définition d'un observateur intervalle et rappelle quelques résultat classique.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(y, \theta, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $\phi$  est une fonction continue de la sortie  $y$ , de l'entrée  $u$  et des paramètres  $\theta$  du système.

**Hypothèse 1.1** *On suppose que la paire  $(A, C)$  est détectable.*

**Hypothèse 1.2** *On suppose qu'il existe un gain  $K$  tel que la matrice  $(A - KC)$  soit de type Metzler et Hurwitz stable.*

**Hypothèse 1.3** *Il existe deux fonctions  $\bar{\phi}$  et  $\underline{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  connues telles que*

$$\underline{\phi}(t) \leq \phi(t) \leq \bar{\phi}(t), \forall t \geq 0$$

Un observateur est dit intervalle s'il assure à la fois l'encadrement de l'état réel par deux trajectoires inférieure et supérieure et la convergence en l'absence de bruits et de perturbations, de ces deux trajectoires vers l'état réel du système considéré.

**Théorème 1.6** [*Gouzé et al., 2000*]

*On suppose que les hypothèses 1.1-1.3 sont vérifiées. Si les conditions initiales sont choisies telles que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$  alors*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{\phi} + K(y - C\bar{x}) \\ \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{\phi} + K(y - C\underline{x}) \end{cases} \quad (1.28)$$

*est un observateur intervalle avec*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \forall t \geq 0.$$

### 1.4.3 Observateurs intervalles pour les systèmes LTV

Plusieurs travaux ont traité le problème d'estimation intervalle pour des systèmes LTV tels que [*Mazenc et Bernard, 2010a, Mazenc et Bernard, 2010b, Efimov et al., 2013c, Efimov et al., 2012b*].

Dans cette partie, on présente la méthode utilisée dans [*Efimov et al., 2013c, Efimov et al., 2012b*] pour la synthèse d'un observateur intervalle pour des systèmes LTV.

Soit le système LTV suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t, y, u) x + f(t, y, u, \rho) \\ y = C(t, u) x \end{cases} \quad (1.29)$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour la construction d'un observateur associé au système (1.29) :

**Hypothèse 1.4**  $\|x\| \leq X, \|u\| \leq U$  et  $\|y\| \leq Y$  pour des constantes  $X > 0, U > 0, Y > 0$  données.

**Hypothèse 1.5** Soit  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , alors  $\underline{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u) \leq f(t, y, u, \rho) \leq \bar{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u)$  pour tout  $t \geq 0, \|u\| \leq U$ .

**Hypothèse 1.6** Il existe des fonctions matricielles  $L$  et  $P$  telles que pour tout  $t \geq 0, \|u\| \leq U, \|y\| \leq Y$  :

$$\begin{aligned} p_1 I_n &\leq P(t) \leq p_2 I_n, p_1, p_2 > 0; \\ \dot{P}(t) + D(t, y, u)^T P(t) + P(t) D(t, y, u) + P(t)^2 + Q &\leq 0; \\ D(t, y, u) &= A(t, y, u) - L(t, y, u) C(t, u), Q = Q^T > 0 \end{aligned}$$

Si la matrice  $D$  est de type Metzler, un observateur intervalle est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t, y, u) \underline{x} + \underline{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u) + L(t, y, u) [y - C(t, u) \underline{x}] \\ \dot{\bar{x}} = A(t, y, u) \bar{x} + \bar{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u) + L(t, y, u) [y - C(t, u) \bar{x}] \end{cases} \quad (1.30)$$

**Théorème 1.7** [Efimov et al., 2013c]

On suppose que les hypothèses 1.4-1.6 sont vérifiées. Soit la matrice  $D(t, y, u)$  de type Metzler pour tout  $t \geq 0$  et  $\|u\| \leq U, \|y\| \leq Y$  et l'une des conditions ci-après est satisfaite :

1.  $|\underline{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u)| < +\infty, |\bar{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u)| < +\infty$  pour tout  $t \geq 0, \|u\| \leq U$  et tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
2. pour tout  $t \geq 0, \|x\| \leq X, \|u\| \leq U, \rho \in \Theta$  et tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$|f(t, x, u, \rho) - \underline{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u)|^2 + |\bar{f}(t, \underline{x}, \bar{x}, u) - f(t, x, u, \rho)|^2 \leq \beta |x - \underline{x}|^2 + \beta |\bar{x} - x|^2 + \alpha$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta \in \mathbb{R}_+$ , et

$$\beta I_n - Q + R \preceq 0, R = R^T \succ 0.$$

Alors  $\underline{x}(t)$  et  $\bar{x}(t)$  restent bornées pour tout  $t > 0$  et

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t),$$

en partant de  $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ .

#### 1.4.4 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV

Un système LPV est défini par une représentation d'état où les matrices d'état et de commande dépendent d'un vecteur dit d'ordonnancement, noté  $\rho$  variant dans le temps.

Plusieurs travaux ont été développés dans la littérature pour synthétiser des observateurs intervalles pour la classe des systèmes LPV [Efimov *et al.*, 2013d, Chebotarev *et al.*, 2015, Efimov *et al.*, 2012a, Lamouchi *et al.*, 2016, Thabet *et al.*, 2013]. Tout au long de ces travaux, le vecteur d'ordonnancement  $\rho$  est supposé inconnu mais contenant dans un domaine compact connu a priori. Dans [Videau, 2009, Raïssi *et al.*, 2010], la synthèse d'observateur est basée sur la linéarisation intervalle. Elle vise à encadrer la trajectoire du système par l'ensemble des trajectoires admissibles du modèle q-LPV. Un observateur intervalle est développé dans [Efimov *et al.*, 2013a] pour un vecteur d'ordonnancement  $\rho$  connu.

Soit un système LPV décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  présente le vecteur de sortie.

Un observateur intervalle associé au système (1.31) est composé de deux observateurs inférieur et supérieur basés sur la structure de Luenberger qui consiste à rajouter un terme de correction dépendant de la sortie à une copie de la dynamique du système en question.



Ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t) + \underline{L}(y(t) - \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}u(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{L}(y(t) - \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

L'hypothèse suivante est nécessaire dans la suite.

**Hypothèse 1.7** *Le bruit de mesure est borné par une borne  $\bar{\varepsilon}$  supposée connue a priori.*

D'après l'hypothèse 1.7, le domaine admissible de la sortie est définie par :

$$[y(t)] = [y_m(t) - \bar{\varepsilon}, y_m(t) + \bar{\varepsilon}] \quad (1.34)$$

En partant de (1.34), l'observateur intervalle (1.32)-(1.33) peut être réécrit sous la forme ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\underline{C})\underline{x}(t) + (\underline{B} - \underline{L}\underline{D})u(t) + \underline{L}(y_m(t) - \bar{\varepsilon}) \\ \underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}u(t) \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\bar{x}(t) + (\bar{B} - \bar{L}\bar{D})u(t) + \bar{L}(y_m(t) + \bar{\varepsilon}) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad (1.36)$$

On considère l'erreur d'observation supérieure  $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ . Sa dynamique est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\bar{e}(t) + \bar{\lambda}(t), \end{aligned} \quad (1.37)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\lambda}(t) = (\Delta_{\bar{A}} - \bar{L}\Delta_{\bar{C}})x(t) + (\Delta_{\bar{B}} - \bar{D}\Delta_{\bar{C}})u(t) + \bar{L}\bar{\varepsilon} \\ A(\rho(t)) = \bar{A} - \Delta_{\bar{A}} \\ B(\rho(t)) = \bar{B} - \Delta_{\bar{B}} \\ C(\rho(t)) = \bar{C} - \Delta_{\bar{C}} \\ D(\rho(t)) = \bar{D} - \Delta_{\bar{D}} \end{cases}$$

De même, la dynamique de l'erreur d'observation inférieure  $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$  est décrite par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{e}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\underline{x}}(t) \\ &= (\underline{A} - \underline{L}\underline{C})\underline{e}(t) + \underline{\lambda}(t)\end{aligned}\tag{1.38}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda}(t) = (\Delta_{\underline{A}} - \underline{L}\Delta_{\underline{C}})x(t) + (\Delta_{\underline{B}} - \underline{D}\Delta_{\underline{C}})u(t) - \underline{L}\bar{e} \\ A(\rho(t)) = \underline{A} - \Delta_{\underline{A}} \\ B(\rho(t)) = \underline{B} - \Delta_{\underline{B}} \\ C(\rho(t)) = \underline{C} - \Delta_{\underline{C}} \\ D(\rho(t)) = \underline{D} - \Delta_{\underline{D}} \end{array} \right.$$

### - Étape 1 : Positivité

L'objectif de cette partie est de calculer des bornes inférieure et supérieure de l'état  $x$  vérifiant l'inégalité ci-après :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq 0\tag{1.39}$$

De ce fait, les gains d'observation  $\underline{L}$  et  $\bar{L}$  sont calculés tels que les matrices  $(\underline{A} - \underline{L}\underline{C})$  et  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  soient de type Metzler et  $\underline{\lambda}(t)$  et  $\bar{\lambda}(t)$  soient positives. Ceci implique que les erreurs d'observations  $\underline{e}(t)$  et  $\bar{e}(t)$  restent non négatives  $\forall t \geq 0$ . Alors, l'inégalité (1.39) est toujours vérifiée.

### - Étape 2 : Convergence

On montrera dans cette partie que  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont bornés. L'étude de la stabilité asymptotique de l'observateur est équivalente à l'étude de celle de l'erreur totale décrite par :

$$\begin{aligned}e(t) &= \bar{e}(t) - \underline{e}(t) \\ &= \bar{x}(t) - \underline{x}(t)\end{aligned}\tag{1.40}$$

Le gain d'observation  $L = \bar{L} = \underline{L}$  est choisi tel que

$$A_e = \begin{pmatrix} 2(\text{mid}[A] - L\text{mid}[C]) & (w[A] - Lw[C]) \\ (w[A] - Lw[C]) & 2(\text{mid}[A] - L\text{mid}[C]) \end{pmatrix}$$

soit stable et de type Metzler. Ainsi, l'erreur  $e$  converge asymptotiquement vers une boule de centre  $\hat{x}_{\max}$  et de rayon  $R_{e\max}$ . Si  $A_e$  est inversible cette boule est calculée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\max} \\ R_{e\max} \end{pmatrix} = A_e^{-1} \Lambda_e \quad (1.41)$$

avec  $A_e$  est un vecteur d'éléments positifs bornant le vecteur :

$$\begin{pmatrix} \text{mid}[B] - L\text{mid}[D] \\ w[B] - Lw[D] \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} Ly(t) \\ 2L\bar{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

La preuve de ces deux étapes est détaillée dans [Raïssi *et al.*, 2010].

## 1.4.5 Relaxation des observateurs intervalles

Dans les sections précédentes la synthèse d'un observateur intervalle repose sur l'existence d'un gain d'observateur  $L$  tel que la matrice  $(A - LC)$  soit de type Metzler pour assurer la positivité de l'erreur d'observation. Cependant, il n'est pas toujours possible de trouver un gain assurant cette contrainte. Cette dernière peut être relaxer [Mazenc et Bernard, 2011, Raïssi *et al.*, 2012a] grâce à l'utilisation de changement de coordonnées. Deux techniques de changement de coordonnées peuvent être utilisées : invariant et variant dans le temps.

### 1.4.5.1 Observateur intervalle par changement de coordonnées invariant dans le temps

La technique utilisée dans [Raïssi *et al.*, 2012a] repose sur un changement de coordonnées invariant dans le temps pour satisfaire la condition de positivité.

On considère le système défini par sa représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.42)$$

L'idée est de trouver une matrice de transformation non singulière  $M$ . Ainsi, le système

$$\begin{cases} \dot{r} = MAM^{-1}r + MBu \\ y = CM^{-1}r \end{cases} \quad (1.43)$$

possède, dans la nouvelle base  $r = Mx$ , l'observateur suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= MAP^{-1}\hat{r} + MBu + ML(y - CM^{-1}\hat{r}z) \\ &= R\hat{r} + MBu + MLy \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec  $R = MAM^{-1} - MLCMP^{-1}$  est une matrice stable et de type Metzler. La matrice non singulière  $M$  est déterminée à partir de la résolution de l'équation de Sylvestre suivante :

$$MA - RM = QC, \quad Q = ML \quad (1.45)$$

### 1.4.5.2 Observateur intervalle par changement de coordonnées variant dans le temps

Dans cette partie, nous présentons la méthode utilisée dans [Mazenc et Bernard, 2011] pour la synthèse d'un observateur intervalle par changement de coordonnées variant dans le temps. Le principe de la technique proposée consiste à utiliser un premier changement de coordonnées basé sur la forme canonique de Jordan puis effectuer un deuxième changement assurant la coopérativité du système.

#### **Théorème 1.8** [Mazenc et Bernard, 2011]

*On considère un système décrit par :*

$$\dot{x} = Ax \quad (1.46)$$

*avec  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $A \in \mathbb{R}^n$  est une matrice constante et stable. On peut trouver une matrice de transformation variante dans le temps  $\beta = P(t)x$ . Cette matrice rend le système (1.46) coopératif et exponentiellement stable.*

Le changement de base  $Y = Px$  transforme (1.46) en

$$\dot{Y} = JY \quad (1.47)$$

où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.48)$$

avec Les premières  $r$  matrices  $J_i$  sont associées aux  $r$  valeurs propres réelles de  $A$  de multiplicité  $n_i$ ; les autres matrices correspondent aux valeurs propres complexes de multiplicité  $m_i$ .

Les premières  $r$  matrices sont données par :

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -\mu_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad (1.49)$$

où les  $\mu_i$  sont des nombres réels positifs.

Les matrices  $J_i$ ,  $i = r + 1, \dots, s$  sont données par :

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda_i & I_2 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i} \quad (1.50)$$

avec

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} -k_i & \omega_i \\ -\omega_i & -k_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

**Lemme 1.1** *Le changement de base variant dans le temps  $\rho = \mathcal{N}(t)x$  transforme le système (1.47) en  $\dot{\rho} = \mathcal{M}\rho$ .*

D'après le lemme 1.1, le système (1.46) est transformé en un système coopératif

$$\dot{\beta} = \mathcal{N}\beta \quad (1.51)$$

avec

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathcal{G} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_s & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{M}_s \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

où

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

et

$$\mathcal{M}_l = \begin{bmatrix} -k_l I_2 & I_2 & \dots & 0 \\ 0 & -k_l I_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & -k_l I_2 \end{bmatrix}, \quad l = r + 1s \quad (1.54)$$

L'observateur intervalle associé est alors

$$\begin{aligned} \dot{z}^+ &= \mathcal{N}z^+ + P^+(t)\omega^+(t) - P^-(t)\omega^-(t), \\ \dot{z}^- &= \mathcal{N}z^- + P^+(t)\omega^-(t) - P^-(t)\omega^+(t), \\ x^+ &= \mathcal{M}^+(t)z^+ - \mathcal{N}^-(t)z^-, \\ \dot{z}^+ &= \mathcal{N}^+(t)z^- - \mathcal{N}^-(t)z^+ \end{aligned} \quad (1.55)$$

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre rappelle quelques notions de base. Il commence par quelques travaux de la littérature portant sur les systèmes à commutations. Il présente les différentes approches de modélisation d'un système à commutations. Ensuite il détaille quelques notions pour l'analyse de stabilité et l'observabilité des systèmes à commutations.

En deuxième lieu, les principaux concepts de la procédure de diagnostic ainsi que les différentes approches de diagnostic sont présentées.

Finalement, les techniques de synthèse d'un observateur intervalle pour les trois dynamiques LTI, LTV et LPV sont abordées. La construction des observateurs intervalles repose essentiellement sur la positivité de l'erreur d'observation.

À l'issue de cette étude bibliographique une nouvelle approche de synthèse des observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations est proposée dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Observateurs intervalles pour des systèmes linéaires à commutations

### 2.1 Introduction

Les observateurs intervalles ont été proposés pour résoudre le problème d'estimation d'état en présence des perturbations inconnues mais de bornes connues. Les observateurs intervalles ont été synthétisés pour des systèmes non linéaires [Raïssi *et al.*, 2012b, Meslem et Ramdani, 2011, Mazenc et Bernard, 2014, Raïssi *et al.*, 2010]. Également, les travaux de [Efimov *et al.*, 2013b, Mazenc *et al.*, 2014, Efimov *et al.*, 2013c] sont consacrés pour des systèmes à temps discret. Dans [Combastel et Raka, 2011, Lamouchi *et al.*, 2016, Mazenc et Bernard, 2011, Yousfi *et al.*, 2014, Mazenc et Bernard, 2010a, Efimov *et al.*, 2012a] des observateurs intervalles ont été proposés pour des systèmes linéaires à temps continu.

D'autres chercheurs sont intéressés par les systèmes dynamiques hybrides. Cet intérêt est justifié particulièrement par le fait qu'une large classe de systèmes réels présente des comportements à la fois continu et discret. De plus, l'estimation de ce type de systèmes complexes présente un axe de recherche très intéressant. Les auteurs de [Degue *et al.*, 2016] ont proposé une structure d'observateur intervalle permettant l'estimation d'état d'un système impulsif. Une étude préliminaire sur l'estimation intervalle des systèmes à commutations a été introduite dans [Ifqir *et al.*, , He et Xie, 2016, He et Xie, 2015]. Ces travaux reposent sur l'existence de gains d'observateurs assurant la positivité et la stabilité de l'erreur d'observation. Cependant, cette hypothèse est souvent restrictive et



rarement vérifiée. Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche pour surmonter ces limitations.

Dans ce chapitre, l'estimation d'état pour les systèmes linéaires à commutations est abordée. Ces systèmes sont soumis à des incertitudes supposées inconnues mais bornées de bornes connues a priori. Dans un contexte à erreurs bornées, un observateur intervalle est construit pour déterminer à chaque instant, d'une manière garantie, toutes les valeurs admissibles de l'état. Deux trajectoires supérieure et inférieure sont alors calculées permettant d'encadrer l'état du système à commutations [Ethabet *et al.*, 2017]. Cependant, il n'est pas toujours possible d'avoir une erreur d'observation positive. Pour ce faire, un changement de coordonnées est introduit pour relaxer cette propriété [Ethabet *et al.*, 2018a].

## 2.2 Lemmes et définitions préliminaires

**Lemme 2.1** [Chebotarev *et al.*, 2015]

Soit le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$  pour  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

1. Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une matrice constante, alors

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x} \quad (2.1)$$

2. Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vérifie  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$  pour  $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , alors

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (2.2)$$

□

**Lemme 2.2** [Gouzé *et al.*, 2000]

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.3)$$

Le système (2.3) est dit coopératif si  $A$  est une matrice de type Metzler et  $u(t) \geq 0$ . Pour

toute condition initiale  $x_0 \geq 0$ , la solution de (2.3) vérifie  $x(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ .  $\square$

**Lemme 2.3** [Hardy et al., 1952]

Soit  $\mu$  une constante positive et  $P = P^T \in \mathbb{R}^n$  une matrice définie positive, alors

$$2x^T y \leq \frac{1}{\mu} x^T P x + \mu y^T P^{-1} y \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

$\square$

**Définition 2.1** [Sontag, 2008]

Soit le système décrit par :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.5)$$

Le système (2.5) est stable entrée-état (Input to State Stable ISS en anglais) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que pour chaque entrée  $u$  et chaque condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  la relation suivante est vérifiée :

$$|x(t, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \alpha(|u|), \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

## 2.3 Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations

### 2.3.1 Formulation du problème

Soit un système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + v(t) \end{cases}, \sigma(t) \in \mathcal{I} \quad (2.7)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_m(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $v(t) \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée, le vecteur de sortie, la perturbation et le bruit de mesure.  $\sigma(t) = \sigma_k \in \mathcal{I}$  est le signal de commutations supposé connu tout au long de cette étude et indique le mode actif à chaque intervalle de temps. La fonction  $\sigma(t)$  est continue, constante par morceaux et prend ses valeurs dans un ensemble d'index  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ .  $N \in \mathbb{N}$  est le nombre des sous-systèmes constituant le système à

commutations.

Soit  $q = \sigma(t)$ , le système (2.7) se réécrit sous la forme si-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases}, q \in \mathcal{I} \quad (2.8)$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires dans ce qui suit.

**Hypothèse 2.1** *La perturbation et le bruit de mesure sont inconnus mais bornés de bornes connues a priori tels que :*

$$|w(t)| \leq \bar{w}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.9)$$

$$|v(t)| \leq \bar{V} E_p, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

où  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{w} \geq 0$  et  $\bar{V}$  est une constante positive.  $\square$

**Hypothèse 2.2** *Il existe des gains  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  sont de type Metzler pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .*  $\square$

L'hypothèse 2.1 indique que la perturbation  $w$  et le bruit de mesure  $v$  sont inconnus mais admettent des bornes supérieures connues et positives. Cette hypothèse est classique dans la théorie des observateurs intervalles.

L'objectif est de déterminer à chaque instant, d'une manière garantie, un ensemble contenant toutes les valeurs admissibles de l'état, encadré par deux trajectoires inférieure et supérieure même en présence de perturbations et de bruit de mesure.

### 2.3.2 Structure de l'observateur intervalle pour l'estimation d'état

Un observateur intervalle est proposé pour le système (2.8) dans [Ethabet *et al.*, 2017]. Il permet de calculer les bornes inférieure et supérieure de l'état. Ces deux trajectoires sont déterminées en utilisant deux observateurs basés sur la structure de Luenberger. Leurs dynamiques sont décrites par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (A_q - L_q C_q) \bar{x}(t) + B_q u(t) + \bar{w}(t) + L_q y_m(t) + |L_q| \bar{V} E_p \\ \dot{\underline{x}}(t) = (A_q - L_q C_q) \underline{x}(t) + B_q u(t) - \bar{w}(t) + L_q y_m(t) - |L_q| \bar{V} E_p \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$  désignent respectivement les bornes supérieure et inférieure de l'état  $x$ .

L'erreur d'observation supérieure s'écrit  $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ . Sa dynamique est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) = (A_q - L_q C_q) \bar{e}(t) + \bar{\Gamma}_q \quad (2.12)$$

avec

$$\bar{\Gamma}_q = \bar{w} - w + L_q v + |L_q| \bar{V} E_p$$

De même, la dynamique de l'erreur d'observation inférieure  $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$  est décrite par :

$$\dot{\underline{e}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\underline{x}}(t) = (A_q - L_q C_q) \underline{e}(t) + \underline{\Gamma}_q, \quad (2.13)$$

avec

$$\underline{\Gamma}_q = w + \bar{w} - L_q v + |L_q| \bar{V} E_p.$$

Pour que (2.11) soit un observateur intervalle pour le système (2.8), il faut qu'il vérifie à la fois les propriétés de positivité et de convergence des erreurs d'observation. Ainsi, les théorèmes 2.1 (assurant la positivité) et 2.2 (assurant la convergence) présentent les conditions nécessaires pour garantir une estimation intervalle du système (2.8).

### **Théorème 2.1** [*Ethabet et al., 2017*]

*Soit un système décrit par (2.8). Supposons que les hypothèses 2.1 et 2.2 sont vérifiées. Pour toute condition initiale vérifiant  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ , s'il existe des gains  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  sont de type Metzler alors*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.14)$$

□

**Preuve 2.1** D'après l'hypothèse 2.1 et le lemme 2.1, on a pour  $v \in \mathbb{R}^p$  :

$$-|L_q|\bar{V}E_p \leq L_q v \leq |L_q|\bar{V}E_p \quad (2.15)$$

Par construction, les perturbations  $w$  et le bruit de mesure  $v$  vérifient  $\bar{w} - w \geq 0$ ,  $w + \bar{w} \geq 0$ ,  $|L_q|\bar{V}E_p + L_q v \geq 0$  et  $|L_q|\bar{V}E_p - L_q v \geq 0$ . Alors,  $\underline{\Gamma}_q$  et  $\bar{\Gamma}_q$  sont positives pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .

En outre, si  $\underline{x}_0$  et  $\bar{x}_0$  sont choisis telles que  $\underline{e}_0$  et  $\bar{e}_0$  sont positives et si les gains  $L_q$  sont calculés de sorte que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler, alors conformément au lemme 2.2 les erreurs d'observation  $\underline{e}(t)$  et  $\bar{e}(t)$  sont positives  $\forall t \geq 0$ . Par conséquent,  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . □

Le théorème 2.2 présente les conditions de convergence de l'observateur (2.11).

**Théorème 2.2** [Ethabet et al., 2017]

Supposons que les hypothèses 2.1 et 2.2 sont vérifiées. Soit  $\mu_q > 0$ , s'il existe une matrice  $M \in \mathbb{R}^n$  symétrique définie positive telle que

$$A_q^T M + M A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \alpha_q M \prec 0 \quad (2.16)$$

où  $\alpha_q = \frac{4}{\mu_q}$  et  $W_q = M L_q$ , alors (2.11) est un observateur intervalle globalement asymptotiquement stable pour le système (2.8) et  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont bornés si  $x$  est borné. □

**Preuve 2.2** Montrons maintenant que si l'état du système est borné alors les bornes inférieure et supérieure de l'état  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  restent bornées  $\forall t \geq 0$ . Soit la fonction de Lyapunov quadratique commune pour l'erreur d'observation supérieure comme suit :

$$V(\bar{e}) = \bar{e}(t)^T M \bar{e}(t) \quad (2.17)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &= \dot{\bar{e}}^T M \bar{e} + \bar{e}^T M \dot{\bar{e}} \\ &= \bar{e}^T \left[ (A_q - L_q C_q)^T M + M (A_q - L_q C_q) \right] \bar{e} - 2\bar{e}^T M w + 2\bar{e}^T M \bar{w} \\ &\quad + 2\bar{e}^T M L_q v + 2\bar{e}^T M |L_q| \bar{V} E_p \end{aligned} \quad (2.18)$$

En appliquant le lemme 2.3, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$-2\bar{e}^T M w \leq \frac{1}{\mu_q} \bar{e}^T M \bar{e} + \mu_q w^T M w \quad (2.19)$$

$$2\bar{e}^T M \bar{w} \leq \frac{1}{\mu_q} \bar{e}^T M \bar{e} + \mu_q \bar{w}^T M \bar{w} \quad (2.20)$$

$$2\bar{e}^T M L_q v \leq \frac{1}{\mu_q} \bar{e}^T M \bar{e} + \mu_q v^T L_q^T M L_q v \quad (2.21)$$

$$2\bar{e}^T M |L_q| \bar{V} E_p \leq \frac{1}{\mu_q} \bar{e}^T M \bar{e} + \mu_q E_p^T \bar{V} |L_q|^T M |L_q| \bar{V} E_p \quad (2.22)$$

Soit  $W_q = M L_q$ . D'après les inégalités (2.19)-(2.22), on obtient :

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq \bar{e}^T \mathcal{B}_1 \bar{e} + \mathcal{C}_1 \quad (2.23)$$

où

$$\mathcal{B}_1 = A_q^T M + M A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \frac{4}{\mu_q} M \quad (2.24)$$

$$\mathcal{C}_1 = w^T [\mu_q M] w + \bar{w}^T [\mu_q M] \bar{w} + v^T [\mu_q L_q^T M L_q] v + E_p^T [\mu_q \bar{V} L_q^T M L_q \bar{V}] E_p \quad (2.25)$$

De même, la fonction de Lyapunov commune pour l'erreur d'observation inférieure est donnée par :

$$V(\underline{e}) = \underline{e}(t)^T M \underline{e}(t) \quad (2.26)$$

La dérivation de la fonction de Lyapunov (2.26) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{e}) &= \underline{\dot{e}}^T M \underline{e} + \underline{e}^T M \underline{\dot{e}} \\ &= \underline{e}^T \left[ (A_q - L_q C_q)^T M + M (A_q - L_q C_q) \right] \underline{e} + 2\underline{e}^T M w + 2\underline{e}^T M \bar{w} \\ &\quad - 2\underline{e}^T M L_q v + 2\underline{e}^T M |L_q| \bar{V} E_p \end{aligned} \quad (2.27)$$

D'après le lemme 2.3, les inégalités ci-après sont vérifiées :

$$2\underline{e}^T M w \leq \frac{1}{\mu_q} \underline{e}^T M \underline{e} + \mu_q w^T M w \quad (2.28)$$

$$2\underline{e}^T M \bar{w} \leq \frac{1}{\mu_q} \underline{e}^T M \underline{e} + \mu_q \bar{w}^T M \bar{w} \quad (2.29)$$

$$-2\underline{e}^T M L_q v \leq \frac{1}{\mu_q} \underline{e}^T M \underline{e} + \mu_q v^T L_q^T M L_q v \quad (2.30)$$

$$2\underline{e}^T M |L_q| \overline{V} E_p \leq \frac{1}{\mu_q} \underline{e}^T M \underline{e} + \mu_q E_p^T \overline{V} |L_q|^T M |L_q| \overline{V} E_p \quad (2.31)$$

On remplace les inégalités (2.28)-(2.31) dans (2.27). Ainsi, la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{V}(\underline{e}) \leq \underline{e}^T \mathcal{B}_1 \underline{e} + \mathcal{C}_2 \quad (2.32)$$

avec

$$\mathcal{C}_2 = w^T [\mu_q M] w + \overline{w}^T [\mu_q M] \overline{w} + v^T [\mu_q L_q^T M L_q] v + E_p^T [\mu_q \overline{V} L_q^T M L_q \overline{V}] E_p \quad (2.33)$$

Étant donné que les perturbations et le bruit de mesure sont bornés,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont alors bornés. Ainsi, si  $\mathcal{B}_1 \prec 0$  les erreurs d'observation inférieure et supérieure  $\underline{e}(t)$  et  $\overline{e}(t)$  sont globalement asymptotiquement stables. D'où  $\underline{e}(t)$  et  $\overline{e}(t)$  sont bornés. Ceci implique que  $\underline{x}(t)$  et  $\overline{x}(t)$  restent bornés  $\forall t \geq 0$ .  $\square$

### 2.3.3 Exemples numériques

Cette partie illustre les performances de l'approche proposée pour l'estimation intervalle à travers deux exemples numériques. Le premier détaille la démarche de synthèse de l'observateur. Le deuxième exemple traite le cas où le changement de coordonnées est indispensable.

#### 2.3.3.1 Exemple 1

Soit le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases}, q \in \{1, 2\} \quad (2.34)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.1 & 1 \\ 0.02 & -1.2 & 1 \\ 0.02 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1 \\ 1.1 & -1.7 & -0.005 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = [1 \ 0 \ 1], C_2 = [0.3 \ 0 \ 1]$$

Les perturbations  $w(t)$  et le bruit de mesure  $v(t)$  sont des signaux uniformément distribués supposés bornés tels que  $-\bar{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$  et  $-\bar{V}E_p \leq v(t) \leq \bar{V}E_p$ .

D'une manière générale, il convient d'obtenir une erreur d'observation la plus faible possible. En effet, l'objectif principal d'un problème d'estimation est de calculer un état estimé qui converge vers l'état réel voire même se confonde. Dans ce contexte, l'observateur intervalle permet de calculer deux trajectoires inférieure et supérieure qui convergent vers un domaine contenant l'état du système. La largeur de ce domaine dépend explicitement des incertitudes. L'influence des perturbations et du bruit de mesure sur la largeur du domaine de convergence est analysée.

Une solution de l'inégalité matricielle (2.16) est donnée par :

$$W_1 = \begin{bmatrix} -14.3480 \\ -13.7339 \\ -19.1547 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 13.6832 \\ -2.8588 \\ 13.5054 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 19.6100 & 8.1497 & 13.1304 \\ 8.1497 & 15.3758 & 8.8507 \\ 13.1304 & 8.8507 & 22.0654 \end{bmatrix}, \alpha_1 = 0.0551, \alpha_2 = 0.0551$$

Les gains d'observateur  $L_q$  sont calculés tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.1329 \\ -0.4793 \\ -0.5968 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.6909 \\ -0.8683 \\ 0.5492 \end{bmatrix}$$

Toutes les conditions des théorèmes 2.1 et 2.2 sont satisfaites. Il en résulte que le système (2.11) est un observateur intervalle asymptotiquement stable pour (2.34) et les bornes supérieure  $\bar{x}$  et inférieure  $\underline{x}$  bornent l'état  $x$ .

Soit maintenant trois cas de simulation. Durant ces trois cas, l'amplitude des



perturbations et du bruit de mesure est variée pour montrer l'effet des incertitudes sur la largeur du domaine de convergence.

Les résultats de simulation pour les trois cas sont représentés sur les figures 2.1-2.9 où les lignes continues présentent l'état réel et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure de l'état. La figure 2.10 présente l'évolution du signal de commutation  $\sigma(t)$  suivant lequel le système change d'un mode à un autre dans les trois cas.

- **1<sup>er</sup> cas** : La perturbation et le bruit de mesure sont supposés nuls. Ainsi, les résultats de simulation associés à ce cas sont donnés par les figures 2.1-2.3 :

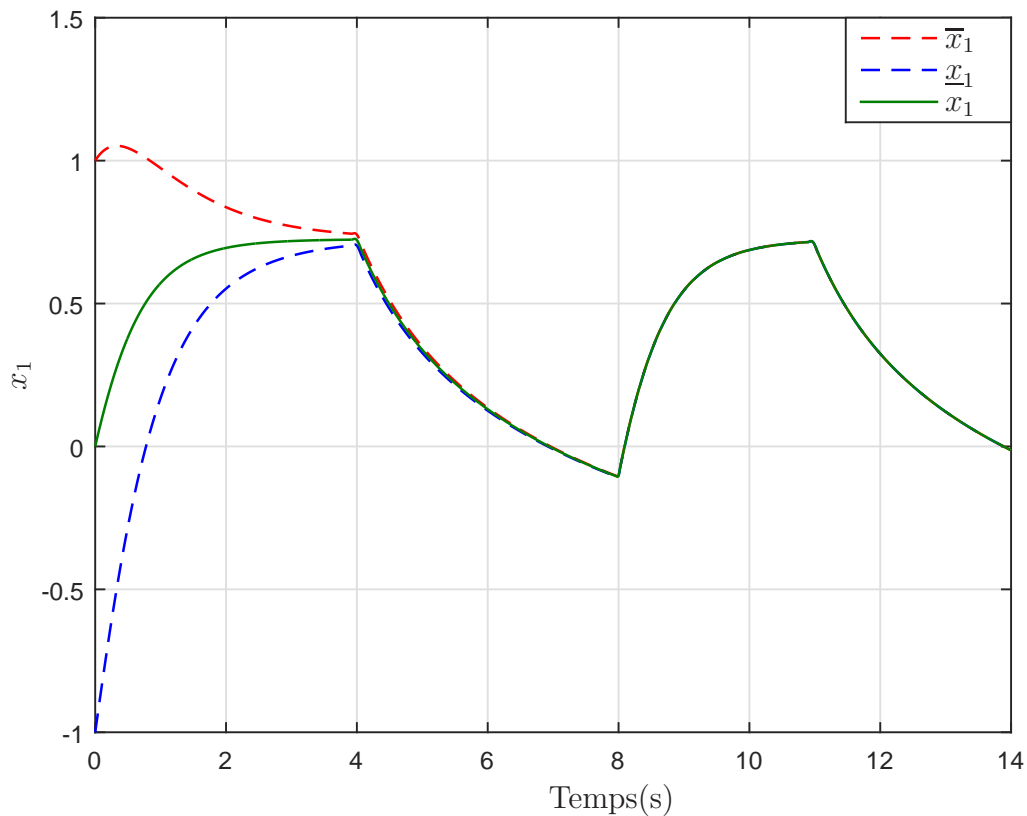


Figure 2.1 – Evolution de la première composante de l'état (Cas sans incertitude).

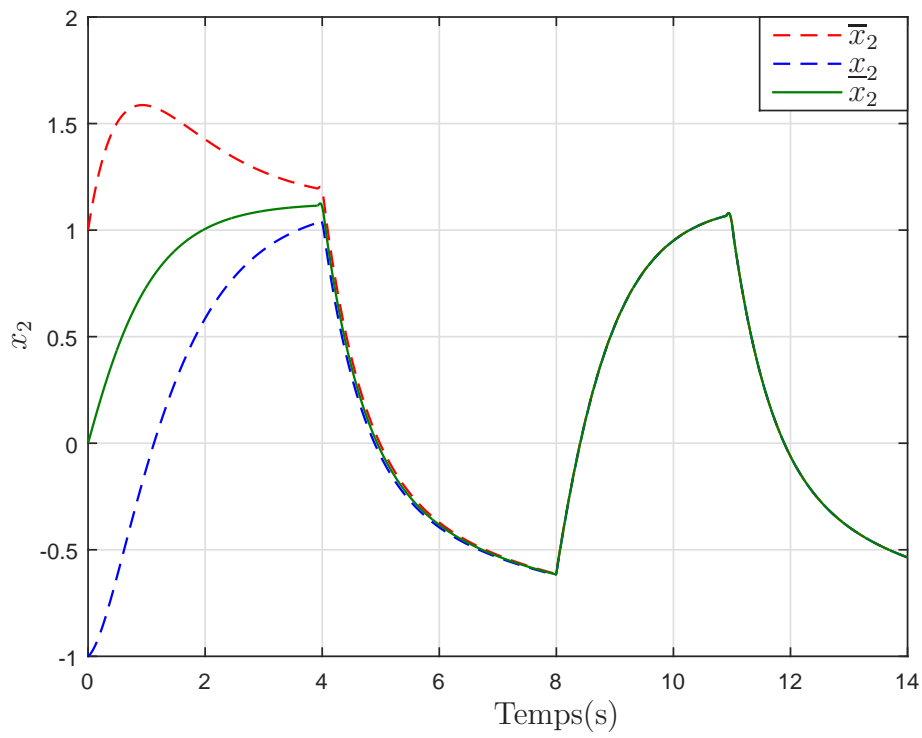


Figure 2.2 – Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas sans incertitude).

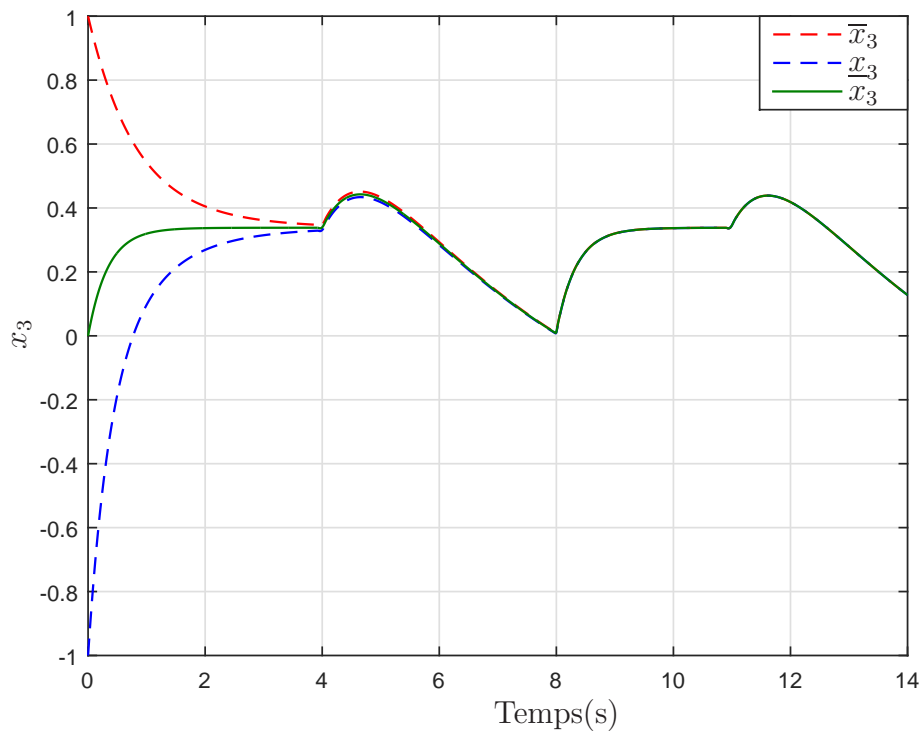


Figure 2.3 – Evolution de la troisième composante de l'état (Cas sans incertitude).

- **2<sup>me</sup> cas** : Dans ce deuxième cas la perturbation et le bruit de mesure sont bornés par :

$$\bar{w} = [0.015 \ 0.015 \ 0.015]^T, \bar{V} = 0.1$$

L'estimation intervalle de l'état du système (2.34) est fournie par les figures ci-dessous :

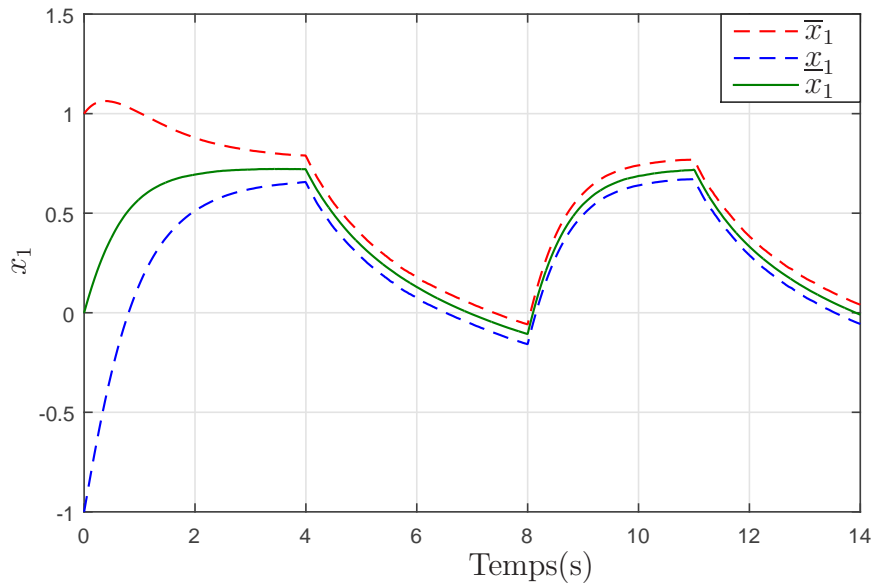


Figure 2.4 – Evolution de la première composante de l'état (Cas bruité).

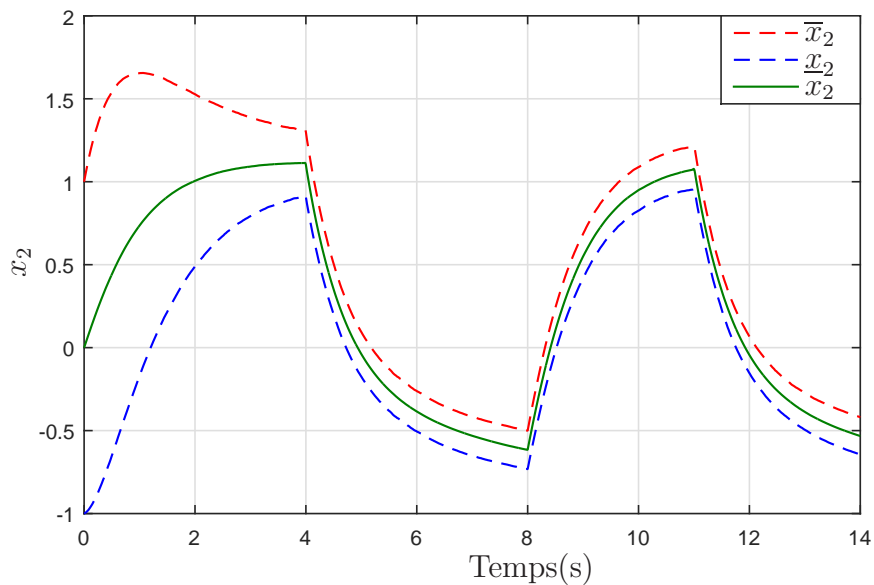


Figure 2.5 – Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas bruité).

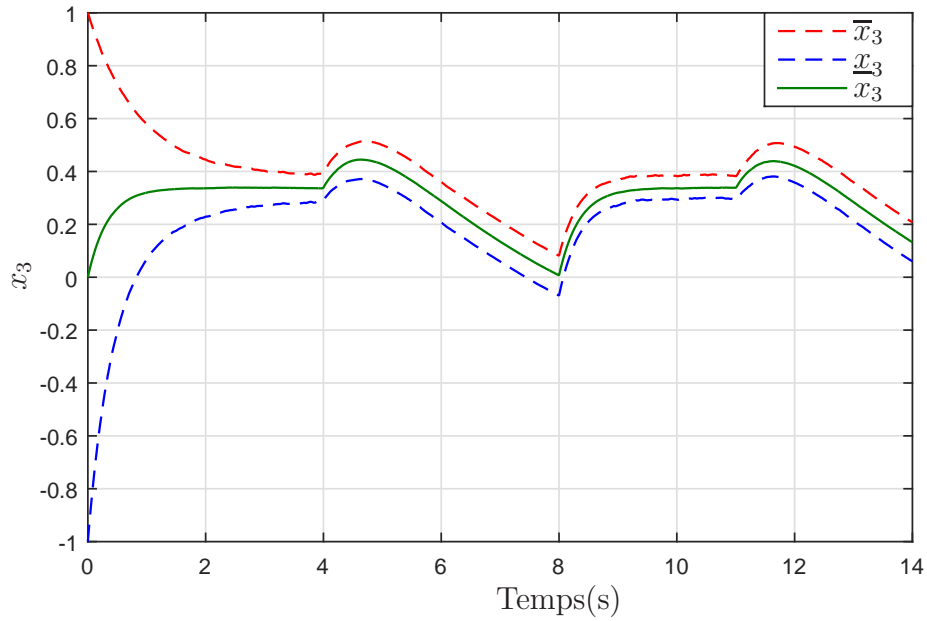


Figure 2.6 – Evolution de la troisième composante de l'état (Cas bruité).

- **3<sup>me</sup> cas** : Dans ce troisième cas, l'amplitude de la perturbation et de bruit de mesure sont fortement bruité tel que  $\bar{w} = [0.1 \ 0.1 \ 0.015]^T$ ,  $\bar{V} = 0.22$

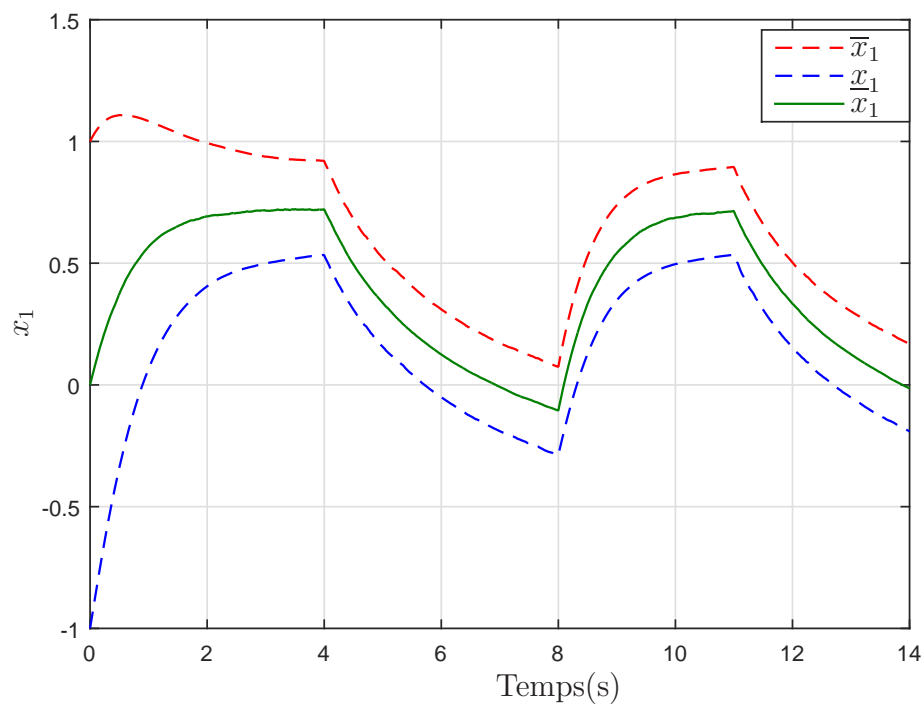


Figure 2.7 – Evolution de la première composante de l'état (Cas fortement bruité).

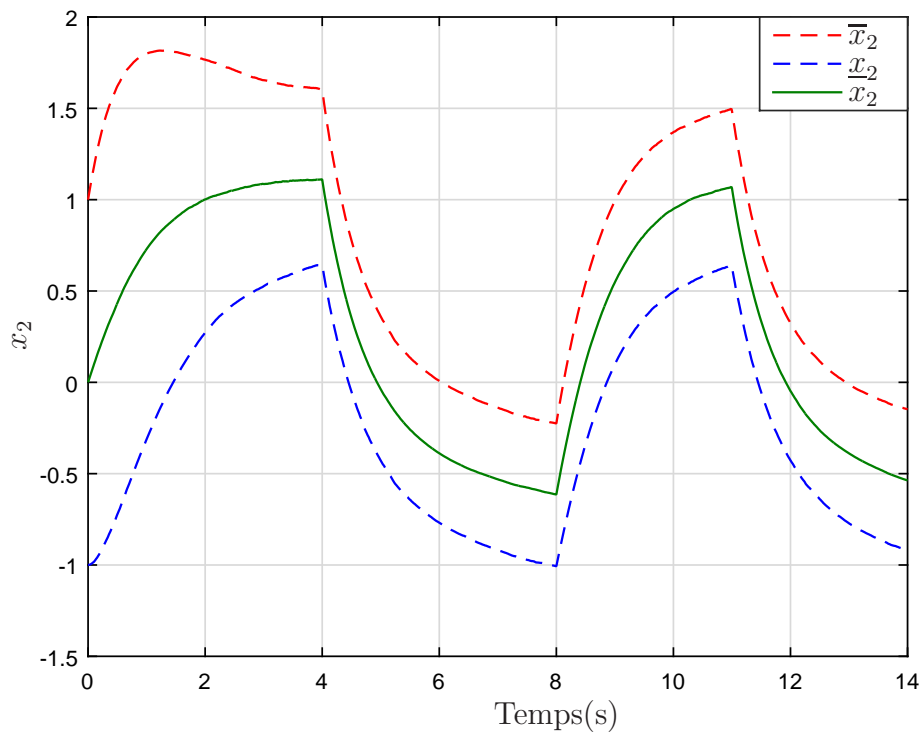


Figure 2.8 – Evolution de la deuxième composante de l'état (Cas fortement bruité).

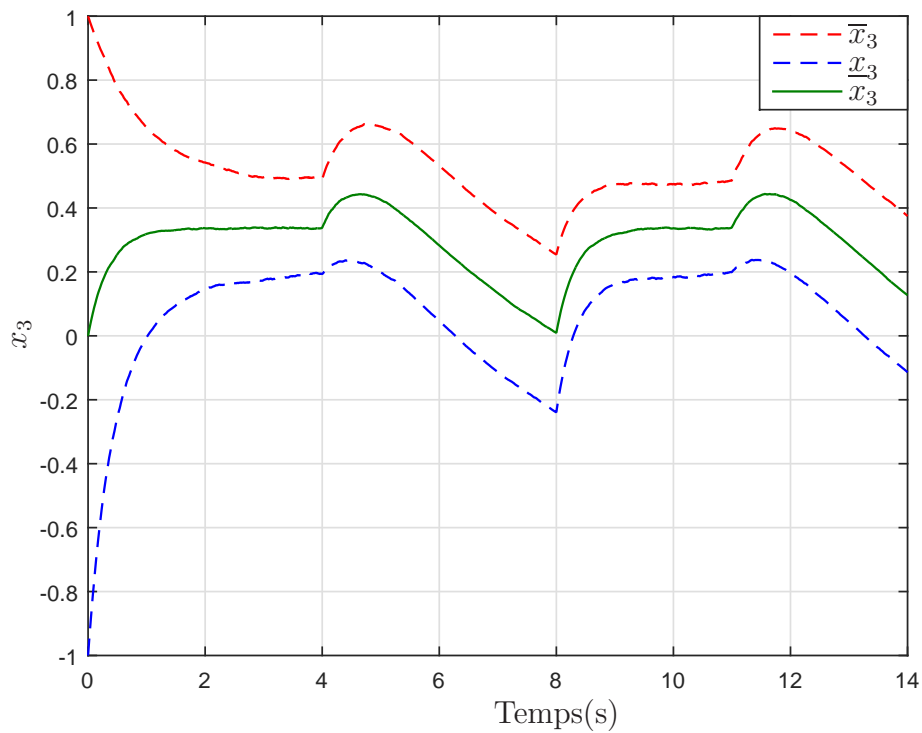


Figure 2.9 – Evolution de la troisième composante de l'état (Cas fortement bruité).

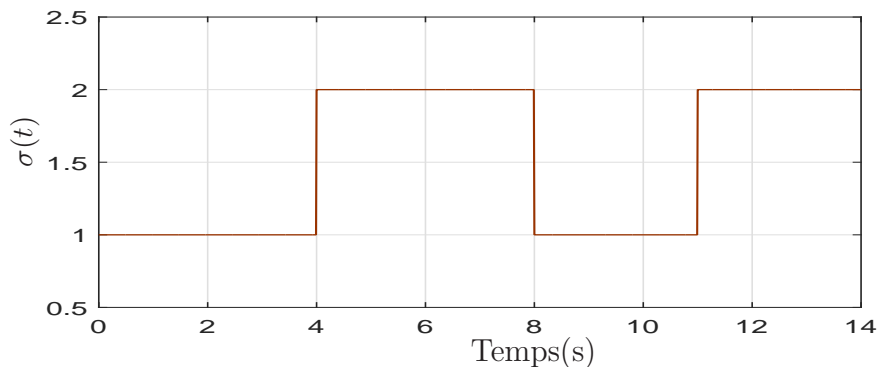


Figure 2.10 – Signal de commutation pour l'exemple 1.

D'après les figures 2.1-2.9, l'observateur intervalle synthétisé a bien garanti l'encadrement de l'état par deux trajectoires inférieure et supérieure dans les trois cas. Cependant, la seule différence entre eux est la largeur du domaine de convergence. Dans le cas où la perturbation et le bruit de mesure sont nuls (Cas 1), les bornes inférieure et supérieure convergent vers l'état réel du système. Dans le deuxième et le troisième cas, les deux bornes convergent non plus vers l'état mais vers un domaine qui le contient. Lorsque les valeurs des perturbations et du bruit de mesure augmentent, la largeur du domaine croit. La largeur du domaine vers lequel convergent les trajectoires estimées dépend de l'amplitude des incertitudes.

Dans cet exemple l'hypothèse 2.2 est vérifiée. Malheureusement, cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite. En d'autres termes, on ne peut pas calculer dans certains cas des gains d'observateurs  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler. Cette restriction est illustrée par l'exemple 2.

### 2.3.3.2 Exemple 2

Soit le système (2.34) où les matrices  $A_q$ ,  $B_q$  et  $C_q$  sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.66 & 3 \\ 0.2 & -2 & -1 \\ 2 & 0.78 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 0.26 & -1 & 5 \\ 1 & -0.15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple, les inégalités matricielles (2.16) ne sont pas faisable et on ne trouve pas des gains d'observateurs  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler.

Cet exemple montre qu'il n'est pas toujours possible de calculer des gains  $L_q$  tels que l'hypothèse 2.2 soit vérifiée. La résolution de ce problème fera l'objet de la section suivante.

## 2.4 Relaxation des observateurs intervalles

La partie précédente montre que la construction d'un observateur intervalle pour les systèmes linéaires à commutations dépend de la vérification de l'hypothèse 2.2. Cependant, cette hypothèse est généralement non valable.

Afin de remédier à cette limitation, nous proposons une approche originale pour relaxer les propriétés de positivité à travers un changement de coordonnées [Ethabet *et al.*, 2018a].

### 2.4.1 Formulation du problème

La littérature propose plusieurs approches permettant de transformer les erreurs d'observation en une forme positive. Par exemple, en se basant sur la forme canonique de Jordan, il a été prouvé dans [Mazenc et Bernard, 2011] qu'il est toujours possible de transformer toute matrice carrée constante à une matrice de type Metzler via une transformation constante ou variante dans le temps. Également, il a été démontré dans [Raïssi *et al.*, 2012a] qu'il existe toujours une matrice de transformation non singulière  $P$  telle que, dans la nouvelle base  $z = Rx$ , la matrice  $R = P(A - LC)P^{-1}$  est de type Metzler. Le lemme 2.4 présente une démarche simple pour assurer l'existence d'une telle transformation.

**Lemme 2.4** [Raïssi et al., 2012a]

Soient des matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . S'il existe une matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telle que  $(A - LC)$  et  $R$  ont les mêmes valeurs propres, et s'il existe deux vecteurs  $\rho_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\rho_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tels que les paires  $(A - LC, \rho_1)$ ,  $(R, \rho_2)$  sont observables, alors il existe une matrice non singulière  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $R = P(A - LC)P^{-1}$  est de type Metzler.  $\square$

Soit une matrice de transformation non singulière  $P$  telle que, dans la nouvelle base  $z = Px$ , le système peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{z} = PA_q P^{-1}z + PB_q u + Pw \\ y_m = C_q P^{-1}z + v \end{cases} \quad (2.35)$$

En se basant sur la structure de Luenberger, un observateur intervalle est synthétisé pour le système (2.35) dans la base  $z$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = P(A_q - L_q C_q)P^{-1}\bar{z} + PB_q u + |P|\bar{w} + PL_q y_m + |PL_q|\bar{V}E_p \\ \dot{\underline{z}} = P(A_q - L_q C_q)P^{-1}\underline{z} + PB_q u - |P|\bar{w} + PL_q y_m - |PL_q|\bar{V}E_p \end{cases} \quad (2.36)$$

Les erreurs d'observation sont exprimées dans la nouvelle base comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}(t) &= \dot{\bar{z}}(t) - \dot{z}(t) \\ &= P(A_q - L_q C_q)P^{-1}\bar{e}(t) + \bar{\Upsilon}_q \end{aligned} \quad (2.37)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{\underline{z}}(t) \\ &= P(A_q - L_q C_q)P^{-1}\underline{e}(t) + \underline{\Upsilon}_q \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_q &= [(P^+ \bar{w} - P^- \underline{w}) - Pw] + |PL_q|\bar{V}E_p + PL_q v, \\ \underline{\Upsilon}_q &= [Pw - (P^+ \underline{w} - P^- \bar{w})] + |PL_q|\bar{V}E_p - PL_q v. \end{aligned}$$



La stabilité asymptotique de l'observateur (2.36) est similaire à celle prouvée dans le théorème 2.2 en utilisant une fonction de Lyapunov commune. Ainsi, l'analyse de stabilité est réduite à la faisabilité des inégalités matricielles linéaires suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_2 &= [P(A_q - L_q C_q)P^{-1}]^T M + M [P(A_q - L_q C_q)P^{-1}]^T + \frac{1}{\delta_q} M \\
 &= P^{-1T} A_q^T P^T M + M P A_q P^{-1} - P^{-1T} C_q^T L_q^T P^T M \\
 &\quad - M P L_q C_q P^{-1} + \frac{1}{\delta_q} M \prec 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Notons que l'existence d'une matrice de transformation commune  $P$  assurant la positivité est rarement garantie. D'ailleurs, il semble très difficile d'assurer que les matrices  $P(A_q - L_q C_q)P^{-1}$  soient toutes de type Metzler. De plus, les inégalités matricielles (2.39) sont non linéaires à cause de la présence du produit de  $P$  et  $M$ . Ainsi, le calcul des gains d'observateurs pour (2.36) ne peut pas être facilement assuré.

De ce fait, nous proposons une technique pour éviter ce problème. L'idée fondatrice de cette approche consiste à concevoir deux observateurs ponctuels dans la base d'origine " $x$ ". Le développement de notre nouvelle méthode est détaillé dans la suite.

## 2.4.2 Transformation de systèmes linéaires à commutations

Soit le système linéaire à commutations décrit par (2.8). En se basant sur la structure de Luenberger, deux observateurs ponctuels sont synthétisés pour (2.8). Leurs dynamiques sont données par :

$$\begin{cases}
 \dot{\hat{x}}^+ = (A_q - L_q C_q) \hat{x}^+ + B_q u + P_q^{-1} (P_q^+ \bar{w} + P_q^- \bar{w}) + L_q y_m + P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{V} E_p \\
 \dot{\hat{x}}^- = (A_q - L_q C_q) \hat{x}^- + B_q u + P_q^{-1} (-P_q^+ \bar{w} - P_q^- \bar{w}) + L_q y_m - P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{V} E_p
 \end{cases} \tag{2.40}$$

Soient les erreurs définies par  $E_q^+ = P_q \hat{x}^+ - P_q x$  et  $E_q^- = P_q x - P_q \hat{x}^-$ . Leurs dynamiques sont respectivement décrites par :

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_q^+ &= P_q \dot{\hat{x}}^+ - P_q \dot{x} \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) \hat{x}^+ - P_q (A_q - L_q C_q) x \\
 &\quad + [(P_q^+ \bar{w} + P_q^- \bar{w}) - P_q w] + P_q L_q v + |P_q L_q| \bar{V} E_p \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1} (P_q \hat{x}^+ - P_q x) + \gamma_q^+ \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1} E_q^+ + \gamma_q^+
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_q^- &= P_q \dot{x} - P_q \dot{\hat{x}}^- \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) x - P_q (A_q - L_q C_q) \hat{x}^- \\
 &\quad + [P_q w - (-P_q^+ \bar{w} - P_q^- \bar{w})] - P_q L_q v + |P_q L_q| \bar{V} E_p \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) x - P_q (A_q - L_q C_q) \hat{x}^- + \gamma_q^- \\
 &= P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1} E_q^- + \gamma_q^-
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

où

$$\begin{aligned}
 \gamma_q^+ &= [(P_q^+ \bar{w} + P_q^- \bar{w}) - P_q w] + P_q L_q v + |P_q L_q| \bar{V} E_p \\
 \gamma_q^- &= [P_q w - (-P_q^+ \bar{w} - P_q^- \bar{w})] + |P_q L_q| \bar{V} E_p - P_q L_q v
 \end{aligned}$$

Le système (2.40) n'est pas un observateur intervalle pour le système (2.8). Cependant, les estimés calculés dans (2.40) sont utilisées dans le théorème 2.3 pour garantir une estimation intervalle pour le système (2.8). Les conditions de stabilité de l'observateur (2.40) sont données en terme d'inégalités linéaires matricielles.

**Théorème 2.3** [*Ethabet et al., 2018a*]

Soient des matrices  $P_q$  ( $q \in \mathcal{I}$ ), telles que  $P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler. Si la condition initiale  $x_0$  vérifie  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ , alors une estimation intervalle pour (2.8) est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{x} = Q_q^+ P_q \hat{x}^- - Q_q^- P_q \hat{x}^+ \\ \bar{x} = Q_q^+ P_q \hat{x}^+ - Q_q^- P_q \hat{x}^- \end{cases} \tag{2.43}$$

satisfaisant

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \quad (2.44)$$

De plus, s'il existe une matrice  $M = M^T \succ 0$  telle que

$$A_q^T M + M A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \sigma_q M \prec 0 \quad (2.45)$$

où

$$\sigma_q = \frac{5}{\delta_q} \text{ et } W_q = M L_q$$

alors (2.40) est globalement asymptotiquement stable et  $\bar{x}$ ,  $\underline{x}$  sont bornés si  $x$  l'est également.  $\square$

**Preuve 2.3** D'après l'hypothèse 2.1 et le lemme 2.1 on a  $-P_q^+ \bar{w} - P_q^- \bar{w} \leq P_q w \leq P_q^+ \bar{w} + P_q^- \bar{w}$  et  $-|P_q L_q| \bar{V} E_p \leq P_q L_q v \leq |P_q L_q| \bar{V} E_p$ . Alors, par construction  $\gamma_q^+$  et  $\gamma_q^-$  sont positives pour tout  $t \geq 0$ .

De plus, si  $\bar{x}_0$  et  $\underline{x}_0$  sont choisis telles que  $E_q^+(0)$  et  $E_q^-(0)$  sont positives et étant donné que les matrices  $P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1}$  sont de type Metzler, alors conformément au lemme 2.2, les erreurs  $E_q^+(t)$  et  $E_q^-(t)$  sont positives  $\forall t \geq 0$ , i.e.  $P_q \hat{x}^- \leq P_q x \leq P_q \hat{x}^+$ . Comme  $Q_q = P_q^{-1}$ , il en découle, d'après le lemme 2.1, que  $\underline{x} = Q_q^+ P_q \hat{x}^- - Q_q^- P_q \hat{x}^+$  et  $\bar{x} = Q_q^+ P_q \hat{x}^+ - Q_q^- P_q \hat{x}^-$  sont des bornes inférieure et supérieure pour  $x$ . Par conséquent,  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Il reste maintenant à montrer que  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$  sont bornés. Ceci est équivalent à prouver que  $E_q^+$  et  $E_q^-$  sont asymptotiquement stables ou simplement prouver que  $e^+ = (\hat{x}^+ - x)$  et  $e^- = (x - \hat{x}^-)$  sont asymptotiquement stables. Pour cela, on considère la fonction de Lyapunov commune suivante pour l'erreur  $e^+$  :

$$V(e^+) = e^{+T} M e^+ \quad (2.46)$$

où  $M = M^T \succ 0$ .

La dérivée de (2.46) est fournie par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e^+) &= \dot{e}^{+T} M e^+ + e^{+T} M \dot{e}^+ \\
 &= e^{+T} \left[ (A_q - L_q C_q)^T M + M (A_q - L_q C_q) \right] e^+ + 2e^{+T} M P_q^{-1} P_q^+ \bar{w} \\
 &\quad + 2e^{+T} M P_q^{-1} P_q^- \bar{w} - 2e^{+T} M w + 2e^{+T} M L_q v \\
 &\quad + 2e^{+T} M |L_q| \bar{V} E_p
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

D'après le lemme 2.3, on obtient les inégalités suivantes :

$$2e^{+T} M P_q^{-1} P_q^+ \bar{w} \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M e^+ + \bar{w}^T \left[ \delta_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M P_q^{-1} P_q^+ \right] \bar{w} \tag{2.48}$$

$$2e^{+T} M P_q^{-1} P_q^- \bar{w} \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M e^+ + \bar{w}^T \left[ \delta_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M P_q^{-1} P_q^- \right] \bar{w} \tag{2.49}$$

$$-2e^{+T} M w \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M e^+ + w^T [\delta_q M] w \tag{2.50}$$

$$2e^{+T} M L_q v \leq \frac{1}{\delta_q} \bar{e}^T M \bar{e} + E_p^T \left[ \delta_q \bar{V} |L_q|^T M |L_q| \bar{V} \right] E_p \tag{2.51}$$

$$2e^{+T} M |L_q| \bar{V} E_p \leq \frac{1}{\delta_q} \bar{e}^T M \bar{e} + v^T [\delta_q L_q^T M L_q] v \tag{2.52}$$

Soit  $W_q = M L_q$ . D'après (2.48)-(2.52), la dérivée de la fonction de Lyapunov commune peut être réécrite de la manière suivante :

$$\dot{V}(e^+) \leq e^{+T} \mathcal{B}_2 e^+ + \mathcal{C}_3 \tag{2.53}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_3 &= (A_q - L_q C_q)^T M + M (A_q - L_q C_q) + \frac{3}{\delta_q} M \\
 &= A_q^T M + M A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \frac{3}{\delta_q} M
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_3 &= \bar{w}^T \left[ \delta_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M P_q^{-1} P_q^+ \right] \bar{w} + \bar{w}^T \left[ \delta_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M P_q^{-1} P_q^- \right] \bar{w} \\
 &\quad + w^T [\delta_q M] w + E_p^T \left[ \delta_q \bar{V} |L_q|^T M |L_q| \bar{V} \right] E_p + v^T [\delta_q L_q^T M L_q] v
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Les perturbations  $w$  et le bruit de mesure  $v$  sont supposés bornés ce qui implique que  $C_3$  est aussi borné. Par conséquent, si  $\mathcal{B}_3 < 0$ , l'erreur d'observation  $e^+$  est asymptotiquement stable et donc elle est bornée. La même démarche montre que l'erreur d'observation  $e^-$  est bornée. Ainsi, comme  $P_q$  et  $Q_q$  sont bornés pour tout  $q \in \mathcal{I}$  alors  $E_q^+$  et  $E_q^-$  sont aussi bornés. Il s'ensuit que  $\underline{x}(t)$  et  $\bar{x}(t)$  restent bornés  $\forall t \geq 0$  si  $x$  est borné.  $\square$

### 2.4.3 Exemple numérique

Soit le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases}, q \in \overline{1,2} \quad (2.56)$$

Les matrices  $A_q$ ,  $B_q$  et  $C_q$  sont choisies telles que :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0.5 \\ 0 & -2.754 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.452 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = [0 \ 0 \ 1], C_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

Les perturbations  $w(t)$  et le bruit de mesure  $v(t)$  sont des signaux uniformément distribués supposés bornés tels que  $-\bar{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$  et  $-\bar{V}E_p \leq v(t) \leq \bar{V}E_p$  avec  $\bar{w} = [0.015 \ 0.015 \ 0.015]^T$  et  $\bar{V} = 0.05$ .

Pour cet exemple, il n'est pas possible de trouver des gains d'observateur  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler. De plus, trouver une même matrice de transformation commune  $P$ , telle que  $P(A_q - L_q C_q)P^{-1}$  soient de type Metzler, est très difficile à satisfaire. Ainsi, l'observateur intervalle (2.40), (2.43) est utilisé avec des matrices de transformation  $P_1$  et  $P_2$  :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2101 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8305 & 0 & -0.1228 \\ -0.8305 & 0 & 1.1228 \end{bmatrix}$$

En utilisant le toolbox LMI de Matlab, une solution de l'inégalité matricielle (2.45) est donnée par :

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.4144 \\ 0 \\ -0.0726 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9338 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.4485 & 0 & -0.0585 \\ 0 & 0.4913 & 0 \\ -0.0585 & 0 & 1.6829 \end{bmatrix}, \alpha_1 = 1.4874, \alpha_2 = 1.4874$$

Les gains d'observateur  $L_q$  sont donnés par :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.9226 \\ 0 \\ -0.0111 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9007 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notons que les matrices  $P_q$  sont calculés telles que  $P_q(A_q - L_q C_q)P_q^{-1}$  soient de type Metzler pour tout  $q \in \overline{1,2}$ . Toutes les conditions du théorème 2.3 sont alors satisfaites. Il en résulte que le système (2.40) est asymptotiquement stable et les bornes supérieure et inférieure de l'état, respectivement  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$ , sont calculées à l'aide de (2.43) avec  $Q_q = P_q^{-1}$ .

Les résultats de simulation sont représentés sur les figures 2.11-2.13 où les lignes continues représentent l'état réel et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure de l'état. La commutation entre les deux sous-systèmes est régie par le signal de commutation  $\sigma(t)$  présenté par la figure 2.14.

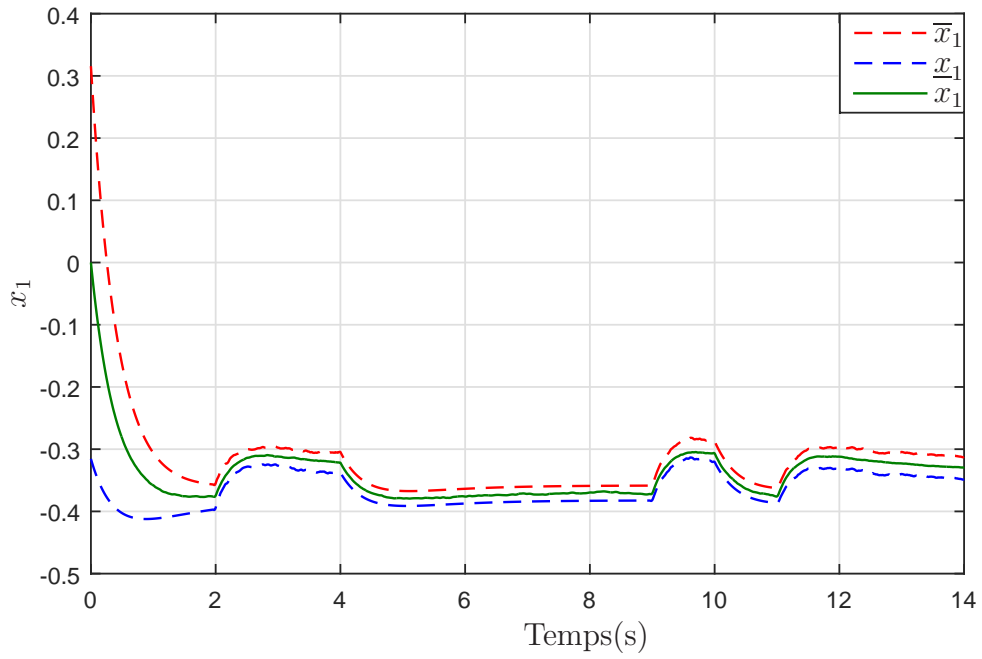


Figure 2.11 – Evolution de la première composante de l'état.

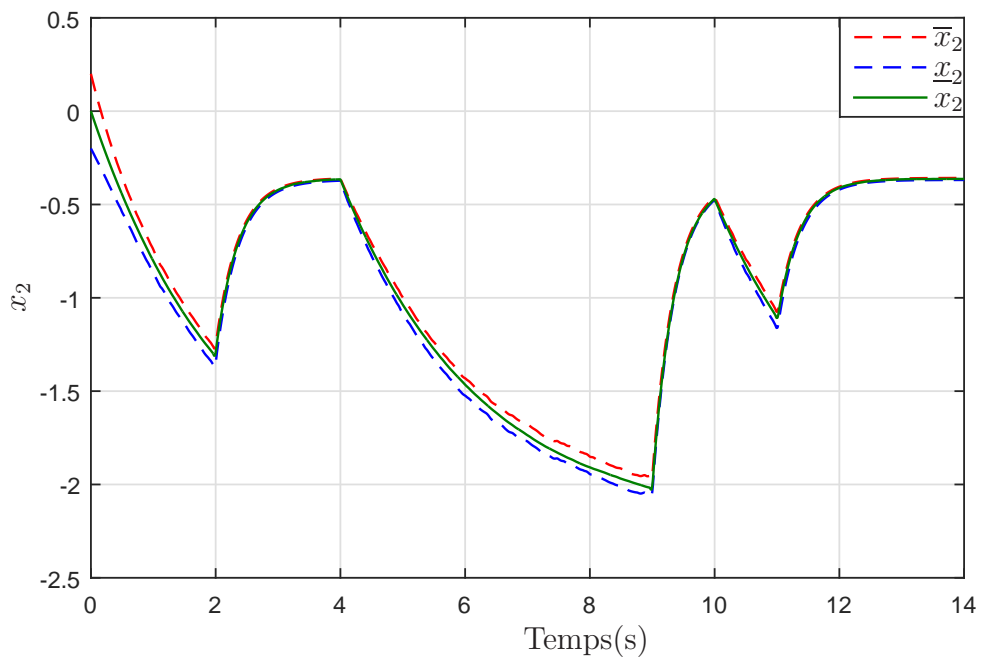


Figure 2.12 – Evolution de la deuxième composante de l'état.

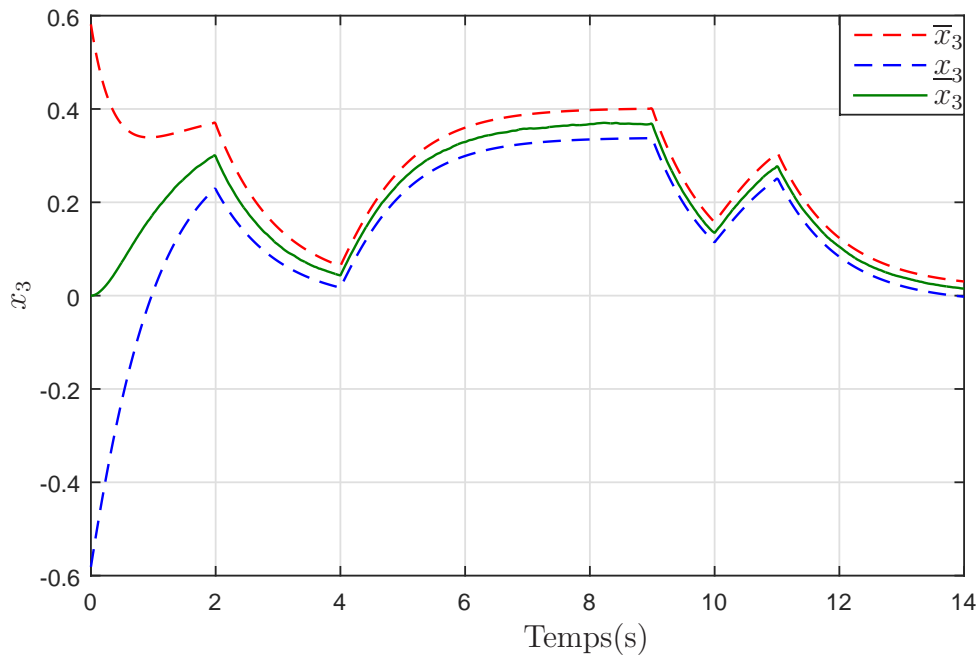


Figure 2.13 – Evolution de la troisième composante de l'état.

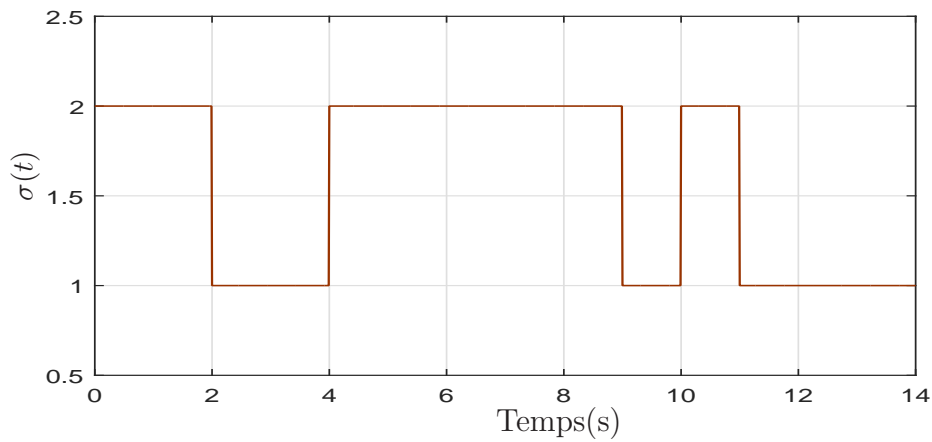


Figure 2.14 – Signal de commutation.

Les figures ci-dessus montrent que, malgré les incertitudes, l'état est encadré par deux trajectoires supérieure et inférieure. La relation  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  est toujours vérifiée. Les bornes  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$  convergent vers un domaine dont la largeur dépend essentiellement des bornes d'incertitudes. Finalement, l'observateur intervalle reste stable en dépit des instants de commutation.



D'après les résultats de simulation, la méthode proposée assure bien la positivité et la stabilité de l'observateur intervalle construit.

## 2.5 Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations avec temps de séjour moyen

### 2.5.1 Formulation du problème

Soit le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + v(t) \end{cases}, \sigma(t) \in \mathcal{I} \quad (2.57)$$

Dans les sections précédentes, un observateur intervalle est synthétisé. Nous avons vu qu'un observateur intervalle doit vérifier les propriétés de positivité et de stabilité. Il a été démontré, en premier lieu, qu'il suffit de trouver des gains d'observateur  $L_q$  assurant la positivité. Cependant, il n'est pas souvent possible de calculer ces gains. Ainsi, un changement de coordonnées est utilisé pour relaxer cette propriété. L'idée consiste à reconstruire deux observateurs ponctuels dans la base d'origine " $x$ ".

En deuxième lieu, nous avons également montré que la convergence de l'observateur est équivalente à celle de l'erreur d'observation. De ce fait, une fonction de Lyapunov commune est appliquée à l'erreur d'observation pour déterminer les conditions de stabilité asymptotique. Toutefois, l'existence de cette fonction de Lyapunov n'est pas toujours garantie [Liberzon, 2012]. C'est pourquoi nous proposons l'utilisation des fonctions de Lyapunov multiples.

D'un point de vue analyse de stabilité des systèmes à commutations, selon la loi de commutation, la stabilité de chaque mode n'implique pas toujours la stabilité du système global. En effet, il est rare de trouver une loi de commutation qui stabilise le système à commutations constitué des sous-systèmes instables. Pour assurer la stabilité asymptotique de l'observateur intervalle l'existence des fonctions de Lyapunov multiples n'est pas suffisante mais il convient d'ajouter une contrainte dite de temps de séjour moyen.

## 2.5.2 Structure de l'observateur intervalle

Soit le système linéaire à commutations défini par (2.57). En se basant sur la structure de Luenberger, un observateur intervalle est synthétisé pour le système (2.57). Sa structure est similaire à celle utilisée dans (2.40). Sa dynamique est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = (A_q - L_q C_q) x^+ + B_q u + P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + L_q y_m + P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \\ \dot{x}^- = (A_q - L_q C_q) x^- + B_q u - P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + L_q y_m - P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \end{cases} \quad (2.58)$$

Soit  $\bar{e} = P_q x^+ - P_q x^-$  l'erreur d'observation supérieure. Sa dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= P_q \dot{x}^+ - P_q \dot{x}^- \\ &= P_q (A_q - L_q C_q) x^+ + |P_q| \bar{w} + P_q L_q y_m + |P_q L_q| \bar{v} - P_q A_q x^- - P_q w \\ &= P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1} \bar{e} + \Upsilon_q^+ \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec

$$\Upsilon_q^+ = |P_q| \bar{w} - P_q w + P_q L_q v + |P_q L_q| \bar{v}$$

D'une façon similaire, la dynamique de l'erreur d'observation inférieure  $\underline{e} = P_q x - P_q x^-$  est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= P_q \dot{x} - P_q \dot{x}^- \\ &= P_q A_q x + P_q w - P_q (A_q - L_q C_q) x^- + |P_q| \bar{w} - P_q L_q y_m + |P_q L_q| \bar{v} \\ &= P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1} \underline{e} + \Upsilon_q^- \end{aligned} \quad (2.60)$$

avec

$$\Upsilon_q^- = |P_q| \bar{w} + P_q w - P_q L_q v + |P_q L_q| \bar{v}$$

La positivité de l'observateur (2.58) est assurée par le théorème 2.4.

### Théorème 2.4

Supposons que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que la condition initiale est choisie telle que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . S'il existe des matrices de transformation non singulières  $P_q$  et des gains d'observateur  $L_q$  tels que les matrices  $P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler,

alors une estimation intervalle pour (2.57) est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{x} = (P_q^{-1})^+ P_q x^+ - (P_q^{-1})^- P_q x^- \\ \underline{x} = (P_q^{-1})^+ P_q x^- - (P_q^{-1})^- P_q x^+ \end{cases} \quad (2.61)$$

avec

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.62)$$

□

**Preuve 2.4** Selon l'hypothèse 2.1 et le lemme 2.1, les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$- |P_q| \bar{w} \leq P_q w \leq |P_q| \bar{w} \quad (2.63)$$

$$- |P_q L_q| \bar{v} \leq P_q L_q v \leq |P_q L_q| \bar{v} \quad (2.64)$$

D'après (2.63) et (2.64), on a  $|P_q| \bar{w} - P_q w \geq 0$ ,  $|P_q| \bar{w} + P_q w \geq 0$ ,  $|P_q L_q| \bar{v} + P_q L_q v \geq 0$  et  $|P_q L_q| \bar{v} E_p - P_q L_q v \geq 0$ . Par construction,  $\Upsilon_q^+$  et  $\Upsilon_q^-$  sont positives pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .

De plus, si les conditions initiales  $\underline{x}_0$  et  $\bar{x}_0$  sont choisies telles que  $\underline{e}_0$  et  $\bar{e}_0$  sont positives et si les matrices de transformation  $P_q$  et les gains  $L_q$  sont calculés afin que les matrices  $P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler, alors conformément au lemme 2.2 les erreurs d'observation  $\underline{e}(t)$  et  $\bar{e}(t)$  sont positives  $\forall t \geq 0$ . Par conséquent,  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . □

Il est indispensable maintenant de montrer que  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$  sont bornés. Ceci est équivalent à déterminer les conditions de stabilité de l'observateur (2.58) comme indiqué dans le théorème 2.5. Nous proposons d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples ainsi qu'une contrainte de temps de séjour moyen.

### Théorème 2.5

Supposons que l'hypothèse 2.1 est vérifiée et que l'état  $x(t)$  est borné. S'il existe des matrices symétriques définies positives  $M_q$  et  $J_q$  et des scalaires  $\rho_q > 1$ ,  $\eta_q > 0$  tels que

$$A_q^T M_q + M_q A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \frac{4}{\mu_q} M_q \preceq -J_q, \quad (2.65)$$

et

$$\rho_{q-1}M_q - M_{q-1} \prec 0 \quad (2.66)$$

alors le système (2.58) est stable entrée-état et  $\bar{x}$ ,  $\underline{x}$  sont bornés à condition que le temps de séjour moyen  $\tau_a$  est choisi suffisamment grand tel que

$$\tau_a > \frac{\ln \rho}{\eta} \quad (2.67)$$

où

$$\eta = \inf \frac{\lambda_{\min}(J_q)}{\lambda_{\max}(M_q)} \quad (2.68)$$

et

$$\rho = \sup \rho_q, q \in \overline{1, N} \quad (2.69)$$

□

**Preuve 2.5** Soient les erreurs d'observation supérieure et inférieure respectivement  $e^+ = x^+ - x$  et  $e^- = x - x^-$ . Leurs dynamiques sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} \dot{e}^+ &= \dot{x}^+ - \dot{x} \\ &= (A_q - L_q C_q) e^+ + P_q^{-1} |P_q| \bar{w} - w + L_q v + P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \end{aligned} \quad (2.70)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{e}^- &= \dot{x} - \dot{x}^- \\ &= (A_q - L_q C_q) e^- + P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + w - L_q v + P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Soit les fonctions de Lyapunov multiples données par :

$$V_q(e^+) = e^{+T} M_q e^+ \quad (2.72)$$

où  $M_q$  sont des matrices symétriques définies positives.

La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V_q$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_q(e^+) &= \dot{e}^{+T} M_q e^+ + e^{+T} M_q \dot{e}^+ \\
 &= e^{+T} \left[ (A_q - L_q C_q)^T M_q + M_q (A_q - L_q C_q) \right] e^+ + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w} \\
 &\quad - 2e^{+T} M_q w + 2e^{+T} M_q L_q v + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \\
 &= e^{+T} \left[ (A_q - L_q C_q)^T M_q + M_q (A_q - L_q C_q) \right] e^+ + \Psi_q
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

avec

$$\Psi_q = 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w} - 2e^{+T} M_q w + 2e^{+T} M_q L_q v + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v}$$

D'après le lemme 2.3, on obtient les inégalités ci-contre :

$$2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w} \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M_q e^+ + \bar{w}^T \delta_q |P_q|^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w} \tag{2.74}$$

$$-2e^{+T} M_q w \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M_q e^+ + w^T [\delta_q M_q] w \tag{2.75}$$

$$2e^{+T} M_q L_q v \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M_q e^+ + v^T [\delta_q L_q^T M_q L_q] v \tag{2.76}$$

$$2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \leq \frac{1}{\delta_q} e^{+T} M_q e^+ + \bar{v}^T \delta_q |P_q L_q|^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \tag{2.77}$$

La combinaison de (2.73) et (2.74)-(2.77) donne :

$$\dot{V}_q(e^+) \leq e^{+T} \mathfrak{A}_q e^+ + \mathfrak{B}_4 \tag{2.78}$$

où

$$\mathfrak{A}_q = A_q^T M_q + M_q A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \frac{4}{\mu_q} M_q \tag{2.79}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}_4 &= \bar{w}^T \delta_q |P_q|^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + w^T [\delta_q M_q] w \\
 &\quad + v^T [\delta_q L_q^T M_q L_q] v + \bar{v}^T \delta_q |P_q L_q|^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

La même démarche montre que la dérivée des fonctions de Lyapunov de l'erreur inférieure s'écrit conformément à :

$$\dot{V}_q(e^-) \leq e^{-T} \mathfrak{A}_q e^- + \mathfrak{B}_4 \quad (2.81)$$

Les perturbations  $w$  et le bruit de mesure  $v$  sont supposés bornés ce qui engendre que  $\mathfrak{B}_4$  est aussi bornée.

On considère que  $\mathfrak{A}_q \prec 0$ , alors il existe une matrice définie positive  $J_q \succ 0$  telle que :

$$A_q^T M_q + M_q A_q - C_q^T W_q^T - W_q C_q + \frac{1}{\mu_q} M_q \preceq -J_q \quad (2.82)$$

D'après (2.82), la dérivée des fonctions de Lyapunov (2.81) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &\leq e^{+T} \mathfrak{A}_q e^+ + \mathfrak{B}_4 \\ &\leq -e^{+T} J_q e^+ + \mathfrak{B}_4 \\ &\leq -\lambda_{\min}(J_q) e^{+T} e^+ + \mathfrak{B}_4 \end{aligned} \quad (2.83)$$

D'après (2.72), on a :

$$\begin{aligned} V_q &= e^{+T} M_q e^+ \\ &\leq \lambda_{\max}(M_q) e^{+T} e^+ \end{aligned}$$

ce qui implique

$$-e^{+T} e^+ \leq -\frac{V_q}{\lambda_{\max}(M_q)} \quad (2.84)$$

En remplaçant (2.84) dans (2.83), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &\leq -\frac{\lambda_{\min}(J_q)}{\lambda_{\max}(M_q)} V_q + \mathfrak{B}_4 \\ &\leq -\eta V_q + \mathfrak{B}_4 \end{aligned} \quad (2.85)$$

avec

$$\eta = \inf \frac{\lambda_{\min}(J_q)}{\lambda_{\max}(M_q)} \quad (2.86)$$

En utilisant (2.72), les fonctions de Lyapunov multiples  $V_q$  vérifient l'inclusion :

$$\alpha_1 \|e^+\| \leq V_q(e^+) \leq \alpha_2 \|e^+\| \quad (2.87)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre des matrices  $M_q$ .

De plus, on suppose qu'il existe des scalaires positifs  $\rho_{q-1} > 1$  tels que :

$$V_{q-1}(t) > \rho_{q-1}V_q(t) \quad (2.88)$$

ou encore

$$\rho_{q-1}M_q - M_{q-1} \prec 0 \quad (2.89)$$

Soit  $\rho = \sup \rho_{q-1}$ . En résumé, si  $\mathfrak{A}_q \prec 0$  et le temps de séjour moyen  $\tau_a$  est choisi suffisamment grand tel que  $\tau_a > \frac{\ln \rho}{\eta}$ , alors le système (2.70) est ISS stable et l'erreur d'observation  $e^+$  est alors bornée. La même démarche montre que l'erreur d'observation  $e^-$  est aussi bornée. De plus, étant donné que  $P_q$  et  $P_q^{-1}$  sont bornés pour tout  $q \in \overline{1, N}$ ,  $\bar{e}$  et  $\underline{e}$  sont alors bornés. Il en découle que  $x^+$  et  $x^-$  sont bornés. Ainsi, vue que  $P_q^{-1}$  sont bornés et  $P_q x^- \leq P_q x \leq P_q x^+$  les états  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$  sont alors bornés.  $\square$

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la construction d'observateurs intervalles pour les systèmes à commutations. Nous avons proposé deux nouvelles techniques de conception d'observateurs intervalles en présence d'incertitudes. Les perturbations et le bruit de mesure sont supposés inconnus mais bornés et de bornes connues a priori.

La première approche consiste à construire un observateur intervalle basé sur une structure de Luenberger. Cet observateur fournit à chaque instant, de manière garantie, des trajectoires supérieure et inférieure encadrant l'état du système linéaire à commutations. La positivité et la convergence présentent les propriétés nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel observateur intervalle. Les conditions de stabilité asymptotique de l'observateur sont données en termes d'inégalités matricielles linéaires.

La deuxième technique proposée permet de relaxer la propriété de Metzler des observateurs intervalles. En effet, nous avons montré qu'il n'est pas toujours possible

d'imposer une dynamique non négative pour l'erreur d'observation. Ce problème est résolu à l'aide de changements de coordonnées. L'idée de cette méthodologie consiste à reconstruire deux observateurs conventionnels dans la base d'origine permettant de déterminer les bornes supérieure et inférieure de l'état. Une formulation en termes d'inégalités matricielles linéaires assure la stabilité asymptotique de l'observateur intervalle.

Également, il a été démontré que la stabilité asymptotique de l'observateur intervalle peut être assurée en utilisant des fonctions de Lyapunov multiples avec des contraintes sur le temps de séjour moyen. Ainsi, un nouvel observateur intervalle est synthétisé pour les systèmes linéaires à commutations.

Le chapitre suivant est dédié à l'estimation intervalle des systèmes linéaires à commutations en présence des entrées inconnues.



# Chapitre 3

## Synthèse d'observateur intervalle à entrée inconnue pour les systèmes linéaires à commutations

### 3.1 Introduction

Les systèmes dynamiques sont souvent soumis, en plus des perturbations et de bruit de mesure, à des entrées inconnues à savoir les erreurs de modélisation, des défauts de capteurs, etc... Dans ce cas, les techniques d'estimation d'état utilisées dans le chapitre précédent ne sont plus valables. Les observateurs à entrées inconnues permettent d'estimer soit uniquement l'état, soit conjointement l'état et les entrées inconnues.

Dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées, nous proposons une méthode de synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à commutations.

### 3.2 Formulation du problème

Soit le système linéaire à commutations avec entrée inconnue décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q d(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^p$ ,  $d \in \mathbb{R}^\delta$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée, la sortie, l'entrée inconnue, les perturbations et le bruit de mesure.

Pour la suite des développements une hypothèse pour assurer l'existence des observateurs à entrée inconnue est nécessaire. Elle s'écrit conformément à :

### Hypothèse 3.1

$$\text{rang}(C_q D_q) = \text{rang}(D_q) = \delta, \quad \forall q \in \mathcal{I}, \delta \leq p \quad (3.2)$$

L'objectif est de calculer les bornes supérieure et inférieure encadrant l'état réel du système en présence des entrées inconnues.

## 3.3 Structure de l'observateur intervalle à entrée inconnue

Un observateur intervalle à entrée inconnue est proposé pour les systèmes linéaires à commutations dans [Ethabet *et al.*, 2018b]. La technique de synthèse de l'observateur intervalle repose sur une méthode de découplage. Elle consiste à rendre l'état partiellement affecté par l'entrée inconnue.

### 3.3.1 Découplage de l'entrée inconnue

Dans cette partie, on s'intéresse à utiliser une méthode de découplage permettant de rendre l'état partiellement affecté par l'entrée inconnue.

En partant de l'hypothèse 3.1, il existe des matrices de transformation d'état non singulières  $T_q = \begin{bmatrix} \Gamma_q & D_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1q} & T_{2q} \\ T_{3q} & T_{4q} \end{bmatrix}$ ,  $T_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Gamma_q \in \mathbb{R}^{n \times (n-\delta)}$  tel que  $x = T_q z$ , qui transforment le système (3.1) en :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}_q z + \tilde{B}_q u + \tilde{D}_q d + \tilde{w}_q \\ y_m = \tilde{C}_q z + v \end{cases}, q \in \mathcal{I} \quad (3.3)$$

où

$$\tilde{A}_q = T_q^{-1}A_qT_q = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1q} & \tilde{A}_{2q} \\ \tilde{A}_{3q} & \tilde{A}_{4q} \end{bmatrix}, \tilde{B}_q = T_q^{-1}B_q = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{1q} \\ \tilde{B}_{2q} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{C}_q = C_qT_q = \begin{bmatrix} C_q\Gamma_q & C_qD_q \end{bmatrix}, \tilde{D}_q = T_q^{-1}D_q = \begin{bmatrix} 0 \\ I_\delta \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{w}_q = T_q^{-1}w = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{1q} \\ \tilde{w}_{2q} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T, z_1 \in \mathbb{R}^{n-\delta}, z_2 \in \mathbb{R}^\delta.$$

Les matrices  $T_q$  sont définies par :

$$T_q^{-1} = \begin{bmatrix} D_q^* \\ D_q^+ \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

avec  $D_q^*$  sont des matrices calculées telles que  $D_q^*D_q = 0$  et  $D_q^* \neq 0$ .  $D_q^+$  représente la matrice pseudo-inverse de  $D_q$ .

Étant donné que  $T_q^{-1}$  ( $q \in \mathcal{I}$ ) est borné, alors  $|\tilde{w}_q| \leq \bar{w}_q$ , avec  $\bar{w}_q = \begin{bmatrix} \bar{w}_{1q} \\ \bar{w}_{2q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur constant positif.

D'après (3.4) et (3.5), le système (3.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \tilde{A}_{1q}z_1 + \tilde{A}_{2q}z_2 + \tilde{B}_{1q}u + \tilde{w}_{1q} \\ \dot{z}_2 = \tilde{A}_{3q}z_1 + \tilde{A}_{4q}z_2 + \tilde{B}_{2q}u + \tilde{w}_{2q} + d \\ y_m = C_q\Gamma_qz_1 + C_qD_qz_2 + v \end{cases} \quad (3.7)$$

**Hypothèse 3.2** On suppose que  $z_1$ ,  $z_2$  et  $d$  sont bornés.

En se basant sur l'hypothèse 3.1, il existe des matrices de transformation de sortie non singulières  $U_q = \begin{bmatrix} C_qD_q & Q_q \end{bmatrix}$  avec  $Q_q \in \mathbb{R}^{p \times (p-\delta)}$ . On note par  $U_q^{-1}$  la matrice inverse de  $U_q$ , ( $q \in \mathcal{I}$ ), telle que  $U_q^{-1} = \begin{bmatrix} U_{1q} \\ U_{2q} \end{bmatrix}$ ,  $U_{1q} \in \mathbb{R}^{\delta \times p}$ ,  $U_{2q} \in \mathbb{R}^{(p-\delta) \times p}$ . La pré-multiplication de  $y_m$  par  $U_q^{-1}$  donne :

$$\begin{cases} U_{1q}y_m = U_{1q}C_q\Gamma_qz_1 + z_2 + U_{1q}v \\ U_{2q}y_m = U_{2q}C_q\Gamma_qz_1 + U_{2q}v \end{cases} \quad (3.8)$$

En isolant  $z_2$  dans la première équation de (3.8), il vient

$$z_2 = U_{1q}y_m - U_{1q}C_q\Gamma_q z_1 - U_{1q}v \quad (3.9)$$

La dynamique de l'état  $z_1$  est obtenue en substituant (3.9) dans la première équation de (3.7) et la combinant avec (3.8). Elle est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \check{A}_{1q}z_1 + \check{B}_{1q}u + \gamma_q y_m + \check{w}_{1q} - \gamma_q v \\ \check{y}_m = \check{C}_q z_1 + U_{2q}v \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} \check{A}_{1q} &= \left( \tilde{A}_{1q} - \tilde{A}_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q \right), \quad \gamma_q = \tilde{A}_{2q}U_{1q}, \\ \check{C}_q &= U_{2q}C_q\Gamma_q, \quad \check{y}_m = U_{2q}y_m \end{aligned}$$

Le système (3.10) met en évidence la dynamique de  $z_1$  en fonction de la mesure  $y_m$  sans faire intervenir l'entrée inconnue. Il est donc possible de construire un observateur de (3.10) indépendant de l'entrée inconnue.

**Hypothèse 3.3** Les paires  $\left( \check{A}_{1q}, \check{C}_q \right)$  sont détectables pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .

### 3.3.2 Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations

Considérons le système (3.10). Pour les mêmes raisons évoquées dans le deuxième chapitre, une structure d'observateur intervalle pour (3.10) est similaire à celle de l'observateur (2.40). L'idée est de concevoir deux observateurs ponctuels dans la base d'origine  $z_1$ . Leurs dynamiques sont décrites par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1^+ = (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ + \check{B}_{1q} u + P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} \\ + P_q^{-1} \left[ P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \right] \\ + P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + L_q \tilde{y}_m + P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} \\ \dot{\hat{z}}_1^- = (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^- + \check{B}_{1q} u + P_q^{-1} (-|P_q|) \bar{w}_{1q} \\ + P_q^{-1} \left[ P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \right] \\ - P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + L_q \tilde{y}_m - P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_{10}^+ = P_q^{-1} (P_q^+ \bar{z}_{10} - P_q^- \underline{z}_{10}) \\ \hat{z}_{10}^- = P_q^{-1} (P_q^+ \underline{z}_{10} - P_q^- \bar{z}_{10}) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

avec  $z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix}$ ,  $z_{10} \in \mathbb{R}^{(n-\delta)}$ ,  $z_{20} \in \mathbb{R}^\delta$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z}_0 = (T_q^{-1})^+ \bar{x}_0 - (T_q^{-1})^- \underline{x}_0 \\ \underline{z}_0 = (T_q^{-1})^+ \underline{x}_0 - (T_q^{-1})^- \bar{x}_0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

et  $P_q$  sont déterminés par le théorème 3.1.

### Théorème 3.1

On suppose que les hypothèses 2.1 et 3.1-3.3 sont vérifiées et que  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ . S'il existe des matrices de transformation non singulières  $P_q \in \mathbb{R}^{(n-\delta) \times (n-\delta)}$  telles que  $P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler, alors une estimation intervalle pour le système (3.10) est décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z}_1(t) = (P_q^{-1})^+ P_q \hat{z}_1^+(t) - (P_q^{-1})^- P_q \hat{z}_1^-(t) \\ \underline{z}_1(t) = (P_q^{-1})^+ P_q \hat{z}_1^-(t) - (P_q^{-1})^- P_q \hat{z}_1^+(t) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

tel que

$$\underline{z}_1(t) \leq z_1(t) \leq \bar{z}_1(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.15)$$

De plus, s'il existe des matrices symétriques définies positives  $M_q$  et  $J_q$  et des scalaires positifs  $\rho > 1$  et  $\eta > 0$  tels que

$$\check{A}_{1q}^T M_q + M_q \check{A}_{1q} - \check{C}_q^T W_q^T - W_q \check{C}_q + \frac{9}{\mu_q} M \leq -J_q \quad (3.16)$$

et

$$\rho_{q-1}M_q - M_{q-1} \prec 0 \quad (3.17)$$

alors (3.11) est ISS et  $\bar{z}_1, \underline{z}_1$  sont bornés à condition que l'ADT  $\tau_a$  est choisi suffisamment grand conformément à :

$$\tau_a > \frac{\ln \rho}{\eta} \quad (3.18)$$

où

$$\eta = \inf \frac{\lambda_{\min}(J_q)}{\lambda_{\max}(M_q)} \quad (3.19)$$

□

### Preuve 3.1

#### 1. Positivité :

En premier lieu, on vise à montrer que  $\bar{z}_1 - z_1 \geq 0$  et  $z_1 - \underline{z}_1 \geq 0$  où  $\bar{z}_1$  et  $\underline{z}_1$  sont donnés par (3.14).

On considère les erreurs d'observation supérieure et inférieure respectivement  $\bar{e}_{z_1} = P_q \hat{z}_1^+ - P_q z_1$  et  $\underline{e}_{z_1} = P_q z_1 - P_q \hat{z}_1^-$ .

D'après (3.3) et (3.11), la dynamique de l'erreur d'observation  $\bar{e}_{z_1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{z_1} &= P_q \dot{\hat{z}}_1^+ - P_q \dot{z}_1 \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ + P_q \tilde{B}_{1q} u + |P_q| \bar{w}_{1q} + P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \\ &\quad - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + P_q L_q \tilde{y}_m + |P_q L_q| |U_{2q}| |\bar{v}| \\ &\quad - P_q \check{A}_{1q} z_1 - P_q \tilde{B}_{1q} u - P_q \gamma_q y_m - P_q \tilde{w}_{1q} + P_q \gamma_q v \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ - P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) z_1 + |P_q| \bar{w}_{1q} \\ &\quad - P_q \tilde{w}_{1q} + P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \\ &\quad + P_q \gamma_q v - P_q \gamma_q y_m + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + |P_q L_q| |U_{2q}| |\bar{v}| + P_q L_q U_{2q} v \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} P_q \hat{z}_1^+ - P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} P_q z_1 + |P_q| \bar{w}_{1q} \\ &\quad - P_q \tilde{w}_{1q} + P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \\ &\quad + P_q \gamma_q v - P_q \gamma_q y_m + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + |P_q L_q| |U_{2q}| |\bar{v}| + P_q L_q U_{2q} v \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} \bar{e}_{z_1} + \Upsilon_q^+ \end{aligned} \quad (3.20)$$

où

$$\begin{aligned}\Upsilon_q^+ &= |P_q| \bar{w}_{1q} - P_q \tilde{w}_{1q} + P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \\ &\quad - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) - P_q \gamma_q y_m + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} \\ &\quad + P_q \gamma_q v + |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} + P_q L_q U_{2q} v\end{aligned}$$

De même, la dynamique de l'erreur d'observation inférieure est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{e}_{z_1} &= P_q \dot{z}_1 - P_q \dot{\hat{z}}_1^- \\ &= P_q \check{A}_{1q} z_1 + P_q \check{B}_{1q} u + P_q \gamma_q y_m + P_q \tilde{w}_{1q} - P_q \gamma_q v - P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^- \\ &\quad - P_q \check{B}_{1q} u - (-|P_q|) \bar{w}_{1q} - P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) + P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \\ &\quad + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} - P_q L_q \tilde{y}_m + |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v}| \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) z_1 - P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^- - (-|P_q|) \bar{w}_{1q} + P_q \tilde{w}_{1q} \\ &\quad - P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) + P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q \gamma_q v + P_q \gamma_q y_m \\ &\quad + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} - P_q L_q U_{2q} v \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} P_q z_1 - P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} P_q \hat{z}_1^- - (-|P_q|) \bar{w}_{1q} \\ &\quad + P_q \tilde{w}_{1q} - P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) + P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q \gamma_q v + \\ &\quad P_q \gamma_q y_m + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} - P_q L_q U_{2q} v \\ &= P_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) P_q^{-1} e_{z_1} + \Upsilon_q^-\end{aligned}\tag{3.21}$$

où

$$\begin{aligned}\Upsilon_q^- &= |P_q| \bar{w}_{1q} + P_q \tilde{w}_{1q} - P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \\ &\quad + P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) + P_q \gamma_q y_m + |P_q| |\gamma_q| \bar{v} \\ &\quad - P_q \gamma_q v + |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} - P_q L_q U_{2q} v\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1, l'inégalité suivante est vraie :

$$\underline{P_q \gamma_q y_m} \leq P_q \gamma_q y_m \leq \overline{P_q \gamma_q y_m}\tag{3.22}$$

où

$$\overline{P_q \gamma_q y_m} = P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right)$$

et

$$\underline{P}_q \gamma_q y_m = P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right)$$

Le même développement est effectué pour  $P_q \gamma_q v$  et  $P_q \tilde{w}_{1q}$  et on démontre les relations suivantes :

$$\underline{P}_q \gamma_q v \leq P_q \gamma_q v \leq \overline{P}_q \gamma_q v \quad (3.23)$$

$$\underline{P}_q \tilde{w}_{1q} \leq P_q \tilde{w}_{1q} \leq \overline{P}_q \tilde{w}_{1q} \quad (3.24)$$

Ainsi, selon (3.22), (3.23), (3.24), et par construction  $\Upsilon_q^+$  et  $\Upsilon_q^-$  sont positives pour tout  $t \geq 0$  et puisque les matrices  $P_q (\tilde{A}_{1q} - L_q \tilde{C}_q) P_q^{-1}$  sont supposées de type Metzler et vérifient  $\bar{e}_{z_1}(0) \geq 0$  et  $\underline{e}_{z_1}(0) \geq 0$ , alors les erreurs d'observation  $\bar{e}_{z_1}(t)$  et  $\underline{e}_{z_1}(t)$  sont positives  $\forall t \geq 0$  tel que

$$P_q \hat{z}_1^- \leq P_q z_1 \leq P_q \hat{z}_1^+ \quad (3.25)$$

D'après (3.25) et en se basant sur le lemme 2.1, les bornes supérieure et inférieure de l'état  $z_1$  sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = (P_q^{-1})^+ P_q \hat{z}_1^+ - (P_q^{-1})^- P_q \hat{z}_1^- \\ \underline{z}_1 = (P_q^{-1})^+ P_q \hat{z}_1^- - (P_q^{-1})^- P_q \hat{z}_1^+ \end{cases}$$

avec

$$\underline{z}_1 \leq z_1 \leq \bar{z}_1, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.26)$$

## (2) Analyse de stabilité :

Pour l'analyse de la stabilité, on s'intéresse à l'utilisation des fonctions de Lyapunov multiples pour assurer la convergence des erreurs d'observation supérieure et inférieure respectivement  $e^+ = \hat{z}_1^+ - z_1$  et  $e^- = z_1 - \hat{z}_1^-$ . Plus précisément, le critère de stabilité est assuré par la satisfaction de la condition de ADT et la faisabilité de certaines LMIs.

On considère les fonctions de Lyapunov multiples définies par :

$$V_q(e^+) = e^{+T} M_q e^+ \quad (3.27)$$

où  $M_q$  sont des matrices symétriques définies positives.



La dérivée de l'erreur d'observation  $e^+$  est décrite ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}^+ &= \dot{\hat{z}}_1^+ - \dot{z}_1 \\
 &= (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ + \check{B}_{1q} u + P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} + P_q^{-1} \left( P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \right) \\
 &\quad - P_q^{-1} \left( P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \right) + P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + L_q \tilde{y}_m + P_q^{-1} |P_q L_q| U_{2q} |\bar{v}| \\
 &\quad - \check{A}_{1q} z_1 - \check{B}_{1q} u - \gamma_q y_m - \tilde{w}_{1q} + \gamma_q v \\
 &= (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ - (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) z_1 + P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} \\
 &\quad - \tilde{w}_{1q} + P_q^{-1} \left( P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \right) - P_q^{-1} \left( P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \right) \\
 &\quad - \gamma_q v - \gamma_q y_m + P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + P_q^{-1} |P_q L_q| U_{2q} |\bar{v}| - L_q U_{2q} v
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

La dérivée des fonctions de Lyapunov (3.27) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_q(e^+) &= \dot{e}^{+T} M_q e^+ + e^{+T} M_q \dot{e}^+ \\
 &= e^{+T} \left[ (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q)^T M_q + M_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \right] e^+ \\
 &\quad + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} - 2e^{+T} M_q \tilde{w}_{1q} \\
 &\quad + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} \left( P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \right) \\
 &\quad - 2e^{+T} M_q P_q^{-1} \left( P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \right) \\
 &\quad + 2e^{+T} M_q \gamma_q v + 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} \\
 &\quad - 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| U_{2q} |\bar{v}| - 2e^{+T} M_q \gamma_q y_m \\
 &\quad + 2e^{+T} M_q L_q U_{2q} v
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

D'après le lemme 2.3, en posant  $x = e^+$  et  $P = M_q$ , les inégalités ci-après sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
 2e^{+T} M_q P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} &\leq \frac{1}{\mu_q} e^{+T} M_q e^+ \\
 + (|P_q| \bar{w}_{1q})^T &\left[ \mu_q P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} \right] |P_q| \bar{w}_{1q}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Aussi, d'après le lemme 2.3 et en posant  $x = -e^+$  et  $P = M_q$ , les inégalités ci-après sont vérifiées :

$$-2e^{+T} M_q \tilde{w}_{1q} \leq \frac{1}{\mu_q} e^{+T} M_q e^+ + \tilde{w}_{1q}^T [\mu_q M_q] \tilde{w}_{1q} \tag{3.31}$$

Soit  $W_q = M_q L_q$ . D'après (3.30), (3.31) et conformément au lemme 2.3, l'équation

(3.29) est réécrite comme suit :

$$\dot{V}(e^+) \leq e^{+T} \mathfrak{A}_{1q} e^+ + \mathfrak{B}_1,$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1q} &= (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q)^T M_q + M_q (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) + \frac{9}{\mu_q} M_q \\ &= \check{A}_{1q}^T M_q + M_q \check{A}_{1q} - \check{C}_q^T W_q^T - W_q \check{C}_q + \frac{9}{\mu_q} M_q \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= (|P_q| \tilde{w}_{1q})^T \left[ \mu_q P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} \right] (|P_q| \tilde{w}_{1q}) \\ &+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right)^T \left[ \mu_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^+ \right] \times \\ &\left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) + \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right)^T \times \\ &\left[ \mu_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^- \right] \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \\ &+ \bar{v}^T |\gamma_q|^T \left[ \mu_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^+ \right] |\gamma_q| \bar{v} \\ &+ \bar{v}^T |\gamma_q|^T \left[ \mu_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^- \right] |\gamma_q| \bar{v} \\ &+ \mu_q |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v}^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} \\ &+ y_m^T \left[ \mu_q \gamma_q^T M \gamma_q \right] y_m + \tilde{w}_{1q}^T \left[ \mu_q M \right] \tilde{w}_{1q} \\ &+ v^T \left[ \mu_q \gamma_q^T M \gamma_q \right] v \\ &+ v^T \left[ \mu_q U_{2q}^T L_q^T M L_q U_{2q} \right] v \end{aligned} \tag{3.32}$$

De même, la dérivée des fonctions de Lyapunov multiples appliquées pour l'erreur d'observation inférieure conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V}_q(e^-) &= \dot{e}^{-T} M_q e^- + e^{-T} M_q \dot{e}^- \\ &\leq e^{-T} \mathfrak{A}_{1q} e^- + \mathfrak{B}_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}_2 = & \left(-|P_q| \tilde{w}_{1q}\right)^T \left[\mu_q P_q^{-1T} M_q P_q^{-1}\right] \left(-|P_q| \tilde{w}_{1q}\right) \\
 & + \left(\gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m\right)^T \left[\mu_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^+\right] \times \\
 & \left(\gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m\right) + \left(\gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m\right)^T \times \\
 & \left[\mu_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^-\right] \left(\gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m\right) \\
 & + \bar{v}^T |\gamma_q|^T \left[\mu_q P_q^{+T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^+\right] |\gamma_q| \bar{v} \\
 & + \bar{v}^T |\gamma_q|^T \left[\mu_q P_q^{-T} P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} P_q^-\right] |\gamma_q| \bar{v} \\
 & + \mu_q |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v}^T P_q^{-1T} M_q P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} \\
 & + y_m^T \left[\mu_q \gamma_q^T M_q \gamma_q\right] y_m + \tilde{w}_{1q}^T \left[\mu_q M_q\right] \tilde{w}_{1q} \\
 & + v^T \left[\mu_q \gamma_q^T M_q \gamma_q\right] v \\
 & + v^T \left[\mu_q U_{2q}^T L_q^T M_q L_q U_{2q}\right] v
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Les perturbations  $w$  et le bruit de mesure  $v$  sont inconnus mais bornés et de bornes connues a priori et selon l'hypothèse 2.1,  $\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}_2$  sont alors bornés.

Si  $\mathfrak{A}_{1q} < 0$ , alors il existe  $J_q > 0$  tel que

$$\check{A}_{1q}^T M_q + M_q \check{A}_{1q} - \check{C}_q^T W_q^T - W_q \check{C}_q + \frac{9}{\mu_q} M \preceq -J_q \tag{3.34}$$

Pour assurer la stabilité les contraintes de ADT doivent être vérifiées ainsi que la faisabilité des LMIs (3.34).

En se basant sur (3.27), les fonctions de Lyapunov vérifient l'inclusion suivante :

$$\iota_1 \|e^+\| \leq V_q(e^+) \leq \iota_2 \|e^+\| \tag{3.35}$$

où  $\iota_1$  et  $\iota_2$  représentent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre des matrices  $M_q$ .

Les dérivées des fonctions de Lyapunov pour l'erreur d'observation supérieure sont

données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_q &\leq e^{+T} \mathfrak{A}_{1q} e^+ + \mathfrak{B}_1 \\
 &\leq -e^{+T} J_q e^+ + \mathfrak{B}_1 \\
 &\leq -\lambda_{\min}(J_q) e^{+T} e^+ + \mathfrak{B}_1
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

D'après (3.27), on a

$$\begin{aligned}
 V_q &= e^{+T} M_q e^+ \\
 &\leq \lambda_{\max}(M_q) e^{+T} e^+
 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$-e^{+T} e^+ \leq -\frac{V_q}{\lambda_{\max}(M_q)} \tag{3.37}$$

En remplaçant (3.37) dans (3.36), on obtient

$$\dot{V}_q \leq -\eta(M_q) V_q + \mathfrak{B}_1 \tag{3.38}$$

avec

$$\eta = \inf \frac{\lambda_{\min}(J_q)}{\lambda_{\max}(M_q)} \tag{3.39}$$

De plus, on suppose qu'il existe des scalaires positifs  $\rho_{q-1} > 1$  tels que :

$$\rho_{q-1} V_q(t) < V_{q-1}(t) \tag{3.40}$$

ou encore

$$\rho_{q-1} M_q - M_{q-1} \prec 0 \tag{3.41}$$

Soit  $\rho = \sup \rho_{q-1}$ . Par conséquent, si le ADT  $\tau_a$  est choisi suffisamment grand tel que  $\tau_a > \frac{\ln \rho}{\eta}$  et  $\mathfrak{A}_q \prec 0$ , alors le système (3.28) est ISS stable et l'erreur d'observation  $e^+$  est alors bornée. La même démarche montre que l'erreur d'observation  $e^-$  est aussi bornée. De plus, étant donné la bornitude de  $P_q$  et  $P_q^{-1}$  pour tout  $q \in \overline{1, N}$ ,  $\bar{e}_{z_1}$  et  $\underline{e}_{z_1}$  sont alors bornés.  $\square$

Jusqu'à maintenant une estimation intervalle de l'état  $z_1$  est proposée suite au découplage de l'état  $x$  de l'entrée inconnue. Il reste alors à déterminer les bornes supérieure

et inférieure dans la base d'origine “ $x$ ”.

**Théorème 3.2** *Supposons que toutes les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées. Alors si  $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0$ , l'inclusion suivante est vraie :*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.42)$$

où  $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}$  et  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = (T_{1q}^+ + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \bar{z}_1 \\ \quad - (T_{1q}^- + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \underline{z}_1 + (T_{2q}U_{1q})^+ \bar{y}_m \\ \quad - (T_{2q}U_{1q})^- \underline{y}_m + (-T_{2q}U_{1q})^+ \bar{v} + (-T_{2q}U_{1q})^- \bar{v} \\ \\ \underline{x}_1 = (T_{1q}^+ + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \underline{z}_1 \\ \quad - (T_{1q}^- + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \bar{z}_1 + (T_{2q}U_{1q})^+ \underline{y}_m \\ \quad - (T_{2q}U_{1q})^- \bar{y}_m - (-T_{2q}U_{1q})^+ \bar{v} - (-T_{2q}U_{1q})^- \bar{v} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_2 = (T_{3q}^+ + (-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \bar{z}_1 \\ \quad - (T_{3q}^- + (-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \underline{z}_1 + (T_{4q}U_{1q})^+ \bar{y}_m \\ \quad - (T_{4q}U_{1q})^- \underline{y}_m + (-T_{4q}U_{1q})^+ \bar{v} + (-T_{4q}U_{1q})^- \bar{v} \\ \\ \underline{x}_2 = (T_{3q}^+ + (-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \underline{z}_1 \\ \quad - (T_{3q}^- + (-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \bar{z}_1 + (T_{4q}U_{1q})^+ \underline{y}_m \\ \quad - (T_{4q}U_{1q})^- \bar{y}_m - (-T_{4q}U_{1q})^+ \bar{v} - (-T_{4q}U_{1q})^- \bar{v} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

De plus,  $\bar{x}(t)$  et  $\underline{x}(t)$  restent bornés  $\forall t > 0$ . □

**Preuve 3.2** *En tenant compte de  $x = T_q z$ , il vient*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1q} & T_{2q} \\ T_{3q} & T_{4q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

D'après (3.9), on rappelle que  $z_2$  a la forme suivante :

$$z_2 = U_{1q}y_m - U_{1q}C_q\Gamma_q z_1 - U_{1q}v$$

De ce qui précède, on obtient

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1q} & T_{2q} \\ T_{3q} & T_{4q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ U_{1q}y_m - U_{1q}C_q\Gamma_q z_1 - U_{1q}v \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$= \begin{bmatrix} T_{1q}z_1 + T_{2q}U_{1q}y_m - T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q z_1 - T_{2q}U_{1q}v \\ T_{3q}z_1 + T_{4q}U_{1q}y_m - T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q z_1 - T_{4q}U_{1q}v \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

On considère les erreurs d'observation décrites par :

$$\begin{cases} \bar{e}_{x_1} = \bar{x}_1 - x_1 \\ \underline{e}_{x_1} = x_1 - \underline{x}_1 \\ \bar{e}_{x_2} = \bar{x}_2 - x_2 \\ \underline{e}_{x_2} = x_2 - \underline{x}_2 \end{cases} \quad (3.48)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{e}_{x_1} &= (T_{1q}^+ + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \bar{E}_{z_1} \\ &\quad + (T_{1q}^- + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \underline{E}_{z_1} + |T_{2q}U_{1q}| \bar{v} \\ &\quad + (-T_{2q}U_{1q})^+ (\bar{v} - v) + (-T_{2q}U_{1q})^- (\bar{v} + v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{e}_{x_1} &= (T_{1q}^+ + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^+) \underline{E}_{z_1} \\ &\quad + (T_{1q}^- + (-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q)^-) \bar{E}_{z_1} + |T_{2q}U_{1q}| \bar{v} \\ &\quad + (-T_{2q}U_{1q})^+ (\bar{v} + v) + (-T_{2q}U_{1q})^- (\bar{v} - v), \end{aligned}$$

et

$$\bar{E}_{z_1} = \bar{z}_1 - z_1, \quad \underline{E}_{z_1} = z_1 - \underline{z}_1.$$

D'après le lemme 2.1, les erreurs d'observation  $\bar{e}_{x_1}$  et  $\underline{e}_{x_1}$  sont positives. Les mêmes arguments montrent que les erreurs d'observation  $\bar{e}_{x_2}$  et  $\underline{e}_{x_2}$  le sont aussi. Il en découle que :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$$

Pour montrer que  $\underline{x}_i(t)$  et  $\bar{x}_i(t)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) sont bornés, on introduit les erreurs

d'observation totale  $e_{x1}$  et  $e_{x2}$  :

$$\begin{aligned}
 e_{x1} &= \bar{x}_1 - \underline{x}_1 \\
 &= (|T_{1q}| + |-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) \bar{E}_{z1} + 4|T_{2q}U_{1q}|\bar{v} \\
 &\quad + (|T_{1q}| + |-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) \underline{E}_{z1}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

et

$$\begin{aligned}
 e_{x2} &= \bar{x}_2 - \underline{x}_2 \\
 &= (|T_{3q}| + |-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) \bar{E}_{z1} + 4|T_{4q}U_{1q}|\bar{v} \\
 &\quad + (|T_{3q}| + |-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) \underline{E}_{z1}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{E}}_{z1} &= \dot{\bar{z}}_1 - \dot{z}_1 \\
 &= (P_q^{-1})^+ P_q \dot{\hat{z}}_1^+ - (P_q^{-1})^- P_q \dot{\hat{z}}_1^- - \dot{z}_1 \\
 &= (P_q^{-1})^+ [P_q \dot{\hat{z}}_1^+ - P_q \dot{z}_1] + (P_q^{-1})^- [P_q \dot{z}_1 - P_q \dot{\hat{z}}_1^-] \\
 &= (P_q^{-1})^+ \dot{\bar{e}}_{z1} + (P_q^{-1})^- \dot{\underline{e}}_{z1}
 \end{aligned}$$

En se basant sur le théorème 2 dans [Gouzé et al., 2000],  $\bar{E}_{z1}$  peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{z1} &\leq - \left[ (P_q^{-1})^+ + (P_q^{-1})^- \right] \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1 \\
 &\leq - |P_q^{-1}| \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{z1} &\leq - \left[ (P_q^{-1})^+ + (P_q^{-1})^- \right] \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1 \\
 &\leq - |P_q^{-1}| \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Alors,  $e_{x1}$  et  $e_{x2}$  sont décrites par :

$$e_{x1} \leq \mathcal{G}_1 \tag{3.53}$$

$$e_{x2} \leq \mathcal{G}_2 \quad (3.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 = & -2(|T_{1q}| + |-T_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) |P_q^{-1}| \times \\ & \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q\check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1 + 4|T_{2q}U_{1q}| \bar{v} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 = & -2(|T_{3q}| + |-T_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q|) |P_q^{-1}| \times \\ & \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q\check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1 + 4|T_{4q}U_{1q}| \bar{v} \end{aligned} \quad (3.56)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = & 2|P_q| \bar{w}_{1q} + 2|P_q| |\gamma_q| \bar{v} + (P_q^+ - P_q^-) |\gamma_q| \bar{v} \\ & + |P_q L_q (U_{2q}^+ \bar{v} + U_{2q}^- \bar{v})| + |P_q L_q U_{2q}| \bar{v} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Donc, les erreurs d'observation  $e_{x1}$  et  $e_{x2}$  sont respectivement asymptotiquement inférieures, élément par élément, aux vecteurs constants  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ . Ceci implique que  $\underline{x}_i(t)$  et  $\bar{x}_i(t)$  sont bornés pour  $i = \overline{1,2}$ .  $\square$

### 3.4 Exemple numérique

On considère le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q d(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.58)$$

Les matrices  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  sont choisies telles que :



$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & -1.5 & 0.2 & 0 \\ -0.3 & 0 & -1.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.1 & 0.2 & -0.1 & 0.1 \\ 0.4 & -1.6 & -0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -2.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.9 & -0.3 & 1.2 & 0 \\ 0 & -2.1 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0.5 & -1.6 & 0.1 \\ -0.1 & 0.3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 1.5 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ 0.04 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

Les perturbations  $w(t)$  et le bruit de mesure  $v(t)$  sont des signaux uniformément distribués supposés bornés tels que  $-\bar{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$  et  $-\bar{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$  avec  $\bar{w} = [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T \times 10^{-3}$  et  $\bar{v} = [0.025 \ 0.025]^T$ .

L'estimation intervalle pour le système linéaire à commutations est obtenue en utilisant la technique de découplage de l'entrée inconnue et le changement de coordonnées.

Pour tout  $q \in \mathcal{I}$ , la condition suivante est vérifiée :

$$\text{rang}(C_q D_q) = \text{rang}(D_q) = 1$$

Il existe alors des matrices de transformation non singulière d'état et de sortie  $T_q$  et  $U_q^{-1}$  données par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0.0786 & -0.0786 & -0.3143 & 1.2 \\ 0.9968 & -0.0032 & -0.0127 & 0.1 \\ -0.0032 & 0.9968 & -0.0127 & 0.1 \\ -0.0127 & -0.0127 & 0.9492 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad U_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3057 & 0.3512 \\ -0.7543 & 0.6565 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.5000 & -0.1667 & 0.1 \\ 0.4048 & -0.3571 & -0.1190 & 0.5 \\ -0.3571 & 0.7857 & -0.0714 & 0.3 \\ -0.1190 & -0.0714 & 0.9762 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad U_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2557 & 0.5708 \\ -0.4138 & 0.9104 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -0.6984 & 0.1397 & 0.0698 & -0.2 \\ 0.7128 & 0.0574 & 0.0287 & -0.2 \\ 0.0574 & 0.9885 & -0.0057 & 0.04 \\ 0.0287 & -0.0057 & 0.9971 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad U_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2.1851 & -1.2853 \\ -0.5070 & 0.8619 \end{bmatrix}$$

Il n'était pas possible de trouver des gains d'observateurs  $L_q$  tels que  $(\check{A}_q - L_q \check{C}_q)$  soient de type Metzler. Néanmoins, on peut utiliser des différentes matrices de transformation  $P_1$  et  $P_2$  pour assurer la propriété de positivité. Ensuite, des observateurs intervalles peuvent être synthétisés.

Les matrices de transformation  $P_1$  et  $P_2$  sont déterminées telles que  $P_q (\check{A}_q - L_q \check{C}_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .

Les constantes  $\eta$  and  $\rho$  sont calculées respectivement à travers (3.19) et (3.17). Elles sont données par  $\eta = 0.1639$  et  $\rho = 1.9659$ . Par conséquent, la relation (3.18) devient  $\tau_a > 4.1242$ .

Toutes les conditions des théorèmes 3.2 et 3.1 sont vérifiées. Donc, l'observateur (3.11) est ISS et  $\bar{z}_1, \underline{z}_1$  sont bornés avec

$$\underline{z}_1(t) \leq z_1(t) \leq \bar{z}_1(t), \quad \forall t \geq 0$$

ce qui implique que

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq 0$$

La commutation entre les différents sous-systèmes est régie par le signal de commutation vérifiant la contrainte de ADT comme indiqué sur la figure 3.1.

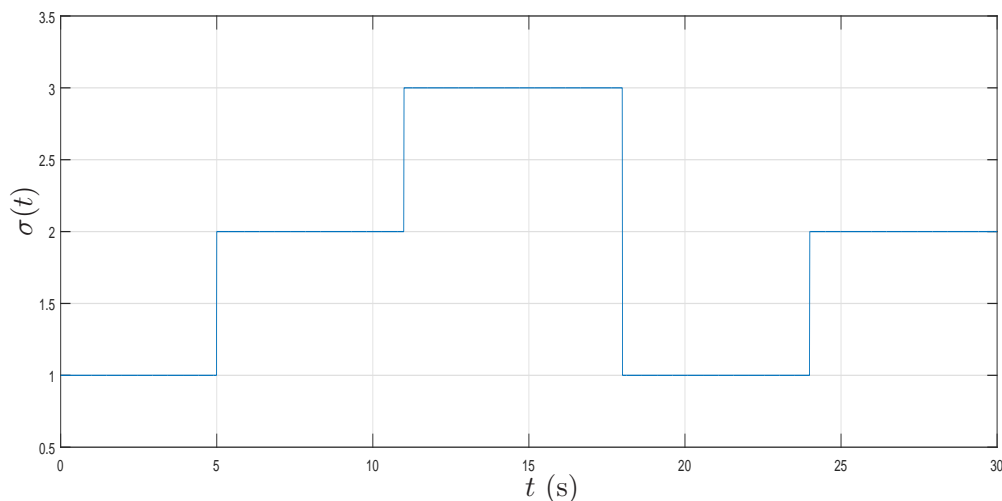


Figure 3.1 – Signal de commutation  $\sigma(t)$ .

Le signal de commande  $u(t)$  utilisé dans cet exemple est un échelon d'amplitude  $u = 0.75$ . Son évolution est représentée sur la figure 3.2.

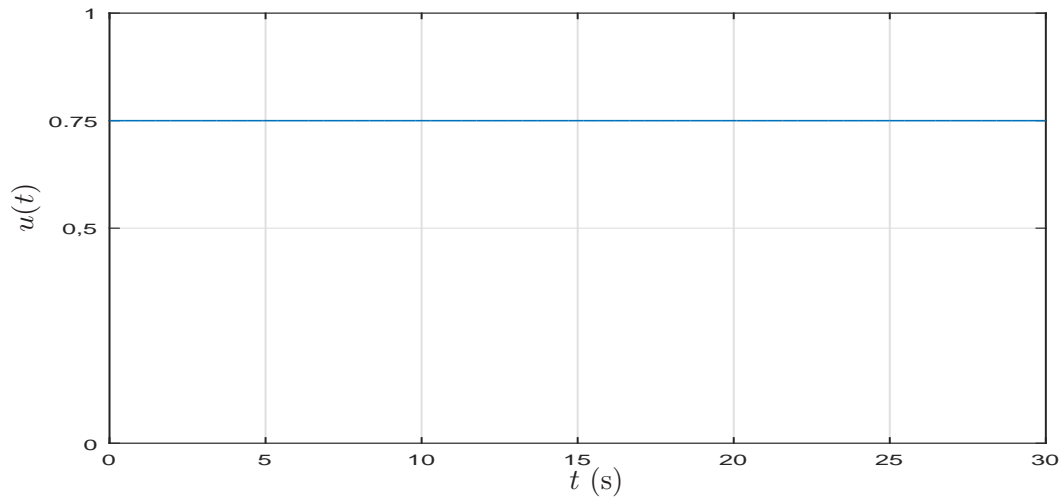
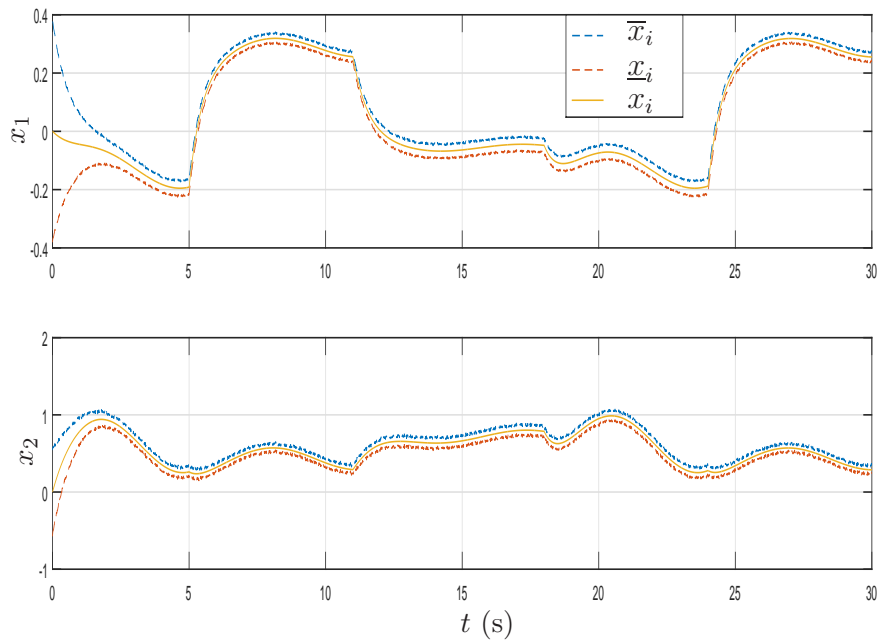


Figure 3.2 – Signal de commande  $u(t)$ .

Les résultats de simulation sont représentés sur les figures 3.3(a)-3.3(b). Les lignes continues représentent l'état du système et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure de l'état.



(a) Les bornes supérieure et inférieure de  $x_1$  et  $x_2$ .

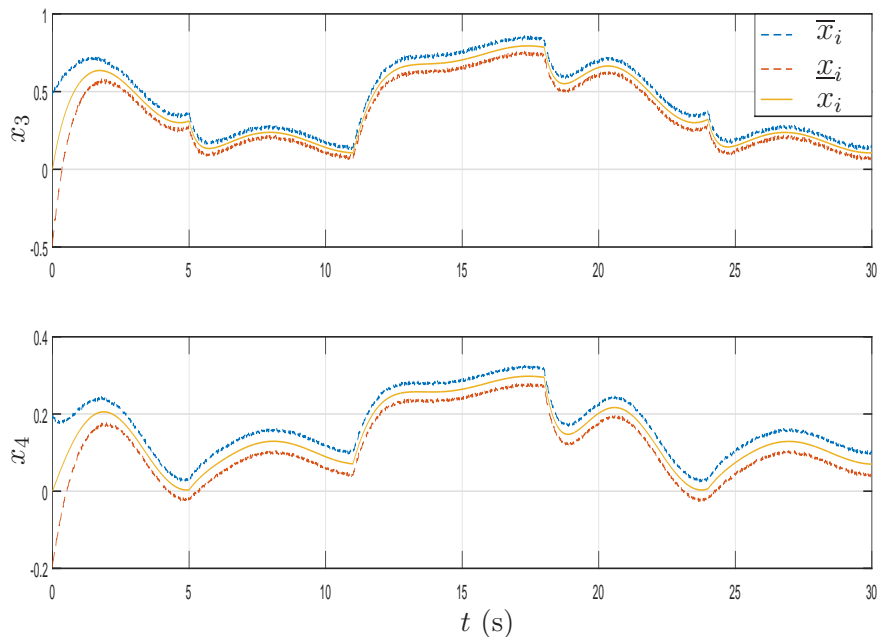

 (b) Les bornes supérieure et inférieure de  $x_3$  et  $x_4$ .

 Figure 3.3 – Estimation intervalle de l'état  $x$ .

D'après les figures ci-dessus, l'état du système linéaire à commutations est bien encadré par les trajectoires supérieure et inférieure. Les bornes  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  convergent vers un domaine dont sa largeur dépend des bornes d'incertitudes.

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre porte sur la synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à commutations. Le principe de cette méthode se base sur une technique de découplage. Elle permet de rendre l'état partiellement affecté par l'entrée inconnue. Le bruit de mesure et les perturbations sont supposés inconnus mais bornés et de bornes connues a priori. L'observateur intervalle proposé assure un encadrement garanti de l'état du système linéaire à commutations par deux trajectoires supérieure et inférieure. Les conditions de convergence de l'observateur sont données en termes des LMIs.

Les observateurs intervalles présentent une technique très intéressante pour le diagnostic à base de modèles. Ils permettent de vérifier la cohérence entre les mesures et

les sorties estimées. La détection d'une éventuelle incohérence implique la présence d'une anomalie. Dans ce contexte, le chapitre suivant est consacré au diagnostic des systèmes linéaires à commutations.

# Chapitre 4

## Diagnostic des systèmes linéaires à commutations dans un contexte à erreurs bornées

### 4.1 Introduction

Le diagnostic des systèmes industriels repose généralement sur deux approches distinctes à savoir l'approche sans modèle et l'approche à base de modèle. L'approche sans modèle est basée sur l'expertise humaine et l'exploitation des données. Elle ne nécessite pas la connaissance du modèle [Gao et Yan, 2010]. Cependant, l'approche à base de modèles nécessite la génération des relations de redondance analytique. Cette approche a été considérée dans plusieurs travaux dans la littérature [Chiang *et al.*, 2000, Patton, 1994]. Parmi ces méthodes, nous distinguons celles à base de l'estimation paramétrique [Jiang *et al.*, 2008, Isermann, 2006], l'espace de parité [Zhong *et al.*, 2015, Gertler, 2015] et les observateurs [Yan et Edwards, 2007, Ding *et al.*, 2002, Jiang et Zhou, 2005].

Ce chapitre s'intéresse au diagnostic à base de modèles par les observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations.

Le chapitre est organisé en trois parties. La première partie traite le diagnostic des systèmes linéaires à commutations dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées. Une méthode de détection de défauts est proposée. Des vecteurs de résidus sont

généérés. Un résidu est défini en fonction des mesures réelles et des bornes estimées par l'observateur ensembliste.

La deuxième partie développe une nouvelle technique pour l'isolation de défauts. Le principe de cette méthode repose sur l'utilisation d'un banc d'observateurs intervalles à entrées inconnues.

La troisième partie présente les étapes nécessaires pour l'estimation de défauts.

## 4.2 Notions préliminaires : observateur à grand gain pour la différenciation numérique

Soit l'observateur à grand gain d'ordre  $n$  décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_k = \hat{x}_{k+1} + \frac{\eta_k}{\varepsilon^k} (y - \hat{x}_1), & 1 \leq k \leq n-1 \\ \dot{\hat{x}}_n = \frac{\eta_n}{\varepsilon^n} (y - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\hat{x}_k$  est l'estimée de la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $y$ .

Pour  $y = x_1 = u$ , l'observateur à grand gain est un différenciateur du signal  $y$ . Il est décrit par :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (4.2)$$

avec

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\eta_1}{\varepsilon} & 1 & \dots & 0 \\ -\frac{\eta_2}{\varepsilon^2} & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\frac{\eta_n}{\varepsilon^n} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_1}{\varepsilon} \\ \frac{\eta_2}{\varepsilon^2} \\ \vdots \\ \frac{\eta_n}{\varepsilon^n} \end{bmatrix}$$

Il a été démontré dans [Vasiljevic et Khalil, 2008] que l'erreur de différenciation ( $\hat{x}_k - u^{(k-1)}$ ) pour la dérivée  $k^{\text{ème}}$  en présence de bruit est bornée par :

$$b_k(\varepsilon) = H_{k+1} \|u^{(n)}\|_{\infty} \varepsilon^{n-k} + \frac{G_{k+1} \|v^{(n)}\|_{\infty}}{\varepsilon^k}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (4.3)$$



avec

$$\begin{aligned}
 H_k &= \int_0^\infty |\{\exp(A_\eta \tau) B\}_k| d\tau, \\
 G_k &= \int_0^\infty |\{\exp(A_\eta \tau) \bar{B}\}_k| d\tau, \\
 A_\eta &= \begin{bmatrix} -\eta_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -\eta_2 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\eta_n & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

et  $u$  et  $v$  sont respectivement le signal à différencier et le bruit de mesure.

Il est important de noter que ce type d'observateur est utilisé dans la dernière partie de ce chapitre.

## 4.3 Détection de défaut pour les systèmes linéaires à commutations

### 4.3.1 Formulation du problème

Soit le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + w(t) + H_q f(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \\ q \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^p$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ , et  $f \in \mathbb{R}^n$  sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée, la sortie, la perturbation, le bruit de mesure, et le défaut additif. Le défaut  $f$  désigne le vecteur des types de défauts qui engendre une modification de la dynamique du système. Le système (4.4) est considéré dans son état de fonctionnement normal lorsque  $f(t) = 0$ .

L'objectif est de développer une procédure de détection de défauts en utilisant la méthode de génération de résidu. On désigne par résidu tout écart entre les mesures

réelles du système et celles estimées à partir d'un observateur d'état. Pour ce faire, un observateur intervalle est utilisé pour calculer les bornes de l'état. On suppose tout au long de cette partie que les perturbations et le bruit de mesure sont inconnus mais bornés et de bornes connues a priori.

### 4.3.2 Synthèse d'observateurs intervalles pour la détection de défauts

Cette section s'intéresse à synthétiser un observateur intervalle dédié à la détection de défauts. Les deux observateurs synthétisés précédemment pour les systèmes à commutations peuvent être utilisés indifféremment. Nous choisissons arbitrairement d'utiliser un observateur avec des fonctions de Lyapunov multiples à temps de séjour moyen. Sa synthèse est développée dans la section 2.5. Il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = (A_q - L_q C_q) x^+ + B_q u + P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + L_q y_m + P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \\ \dot{x}^- = (A_q - L_q C_q) x^- + B_q u - P_q^{-1} |P_q| \bar{w} + L_q y_m - P_q^{-1} |P_q L_q| \bar{v} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les bornes supérieure et inférieure de l'état sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x} = (P_q^{-1})^+ P_q x^+ - (P_q^{-1})^- P_q x^- \\ \underline{x} = (P_q^{-1})^+ P_q x^- - (P_q^{-1})^- P_q x^+ \end{cases} \quad (4.6)$$

Les bornes supérieure et inférieure  $\bar{y}$  et  $\underline{y}$  de la sortie sont calculées, d'après le lemme 2.1, comme suit :

$$\begin{cases} \bar{y} = C_q^+ \bar{x} - C_q^- \underline{x} + \bar{v} \\ \underline{y} = C_q^+ \underline{x} - C_q^- \bar{x} - \bar{v} \end{cases} \quad (4.7)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la positivité et la convergence des erreurs d'observation sont données par les théorèmes 2.4 et 2.5.

Les bornes supérieure et inférieure de sortie étant calculées, il convient de générer les vecteurs résidus puis les évaluer.

### 4.3.3 Détection de défaut

La phase de détection consiste à indiquer la présence d'un défaut et donc à déterminer si un système est défaillant ou non. L'idée principale de la procédure de détection se base, généralement, sur l'évaluation de la non nullité du vecteur résidu pour signaler la présence d'un défaut. Dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées, la procédure de détection se fait en deux étapes :

– **Étape 1 : génération de résidus intervalles**

Cette étape consiste à calculer deux résidus supérieur et inférieur. Ces derniers sont définis comme étant l'écart entre les mesures réelles du système et leurs bornes calculées par un observateur intervalle. Ils sont décrits par :

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{y} - y_m \\ \underline{r} = \underline{y} - y_m \end{cases} \quad (4.8)$$

D'après (4.8) et tenant compte que  $C_q = C_q^+ - C_q^-$ , les bornes supérieure et inférieure du vecteur résidu sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{y} - y_m \\ &= C_q^+ (\bar{x} - x) + C_q^- (x - \underline{x}) - v + \bar{v} \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{y} - y_m \\ &= -C_q^+ (x - \underline{x}) - C_q^- (\bar{x} - x) - v - \bar{v} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Un système augmenté est alors adopté. Il est décrit par :

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_q^+ & C_q^- \\ -C_q^- & -C_q^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v + \bar{v} \\ -v - \bar{v} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

avec

$$e_1 = (\bar{x} - x)$$

et

$$e_2 = (x - \underline{x})$$

Étant donné que le bruit de mesure  $v$  est borné, l'analyse de stabilité des résidus supérieur et inférieur est équivalente à celle des erreurs d'estimation. Comme les erreurs d'observation sont ISS stables, il en découle que les résidus  $\bar{r}$  et  $\underline{r}$  sont ISS stables.

– **Étape 2 : évaluation de résidus intervalles**

L'évaluation de résidus indique la présence d'un défaut. Lorsqu'un défaut s'est produit, une déviation est détectée. Ceci est justifié par le fait que les sorties estimées ne sont plus compatibles avec les mesures, i.e.

$$y_m \notin [\underline{y}, \bar{y}] \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) peut être réécrite indifféremment de la manière suivante :

$$0 \notin [\underline{y}, \bar{y}] - y_m \quad (4.13)$$

ou

$$0 \notin [\underline{y} - y_m, \bar{y} - y_m] \quad (4.14)$$

ou encore

$$0 \notin [\underline{r}, \bar{r}] \quad (4.15)$$

D'après (4.15), le signal zéro est encadré par les bornes supérieure et inférieure du vecteur résidu en absence de défauts. Toutefois, un défaut est détecté dans le cas contraire. Ainsi, l'évaluation de résidus est effectuée selon le test d'appartenance du signal zéro à l'intervalle délimité par les bornes supérieure et inférieure  $\bar{r}$  et  $\underline{r}$  du vecteur résidu.

### 4.3.4 Exemple numérique

Soit le système linéaire à commutations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + w(t) + H_q f(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \\ q \in \overline{1,2} \end{cases} \quad (4.16)$$

Les matrices  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $H_q$  sont telles que :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & -2.754 & 0 \\ 0 & -0.1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0.8 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0.1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Les perturbations  $w(t)$  et le bruit de mesure  $v(t)$  sont des signaux uniformément distribués supposés bornés tels que  $-\bar{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$  et  $-\bar{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$  avec  $\bar{w} = [0.003 \ 0.003 \ 0.003]^T$  et  $\bar{v} = 0.03$ .

Dans cet exemple, il n'était pas possible de trouver des gains d'observateur  $L_q$  tels que les matrices  $(A_q - L_q C_q)$  soient de type Metzler. Ainsi, des matrices de transformation  $P_1$  et  $P_2$  sont calculées telles que  $P_q (A_q - L_q C_q) P_q^{-1}$  soient de type Metzler pour tout  $q \in \overline{1,2}$  :

$$P_1 = \begin{bmatrix} -0.3663 & -0.0660 & 1.0424 \\ 0.3666 & -0.0017 & -0.0425 \\ -0.0003 & 0.0677 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -0.2426 & 0.0280 & 0.5477 \\ 0.0082 & -0.1045 & 0.0016 \\ 0.2344 & 0.0765 & 0.4507 \end{bmatrix}$$

Une solution de LMI décrite par (2.65) est donnée comme suit :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2.4888 \\ 0.1109 \\ 1.5162 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -2.2062 \\ -0.0897 \\ 0.3360 \end{bmatrix}$$

En plus de la condition de stabilité représentée par les inégalités matricielles (2.65), une contrainte de temps de séjour moyen doit être aussi vérifiée. Cette contrainte est donnée par (2.67). Les constantes  $\eta$  et  $\rho$  sont calculées respectivement conformément aux (2.68) et (2.69),

$$\eta = 0.8137 \text{ et } \rho = 19.3306$$

Ainsi, l'inégalité (2.67) peut être réécrite telle que  $\tau_a > 3.6396$ . Par conséquent, toutes les conditions des théorèmes 2.4 et 2.5 sont assurées. Il en découle que le système (4.5) est ISS stable et les bornes supérieure et inférieure de l'état, respectivement  $\bar{x}$  et  $\underline{x}$ , sont calculées à l'aide de (4.6).

Le système à commutations est affecté par un défaut additif  $f(t)$ , avec :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 20s \leq t \leq 26s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.17)$$

La figure 4.1 présente l'évolution temporelle du défaut  $f(t)$ .

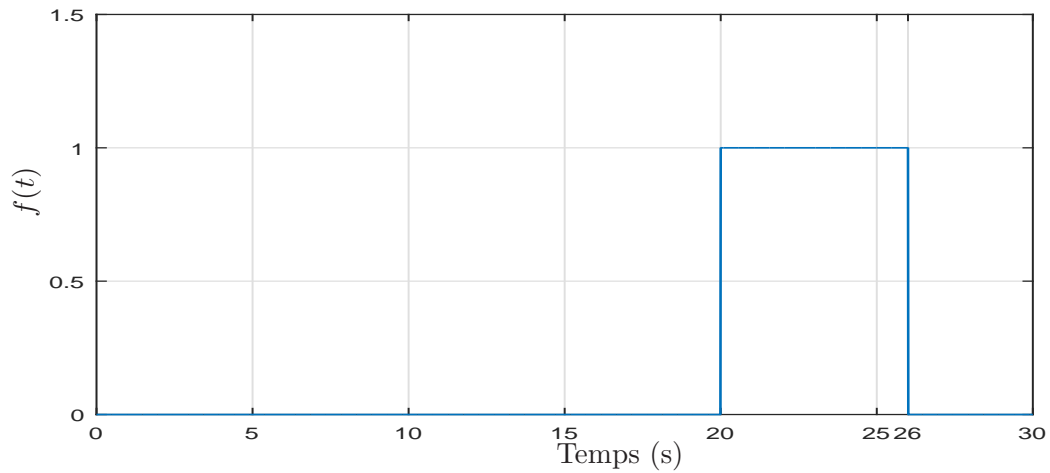


Figure 4.1 – Évolution de défaut  $f(t)$ .

La commutation entre les deux sous-systèmes est régie par le signal de commutation  $\sigma(t)$ , vérifiant la contrainte de ADT, comme indiqué par la figure 4.2.

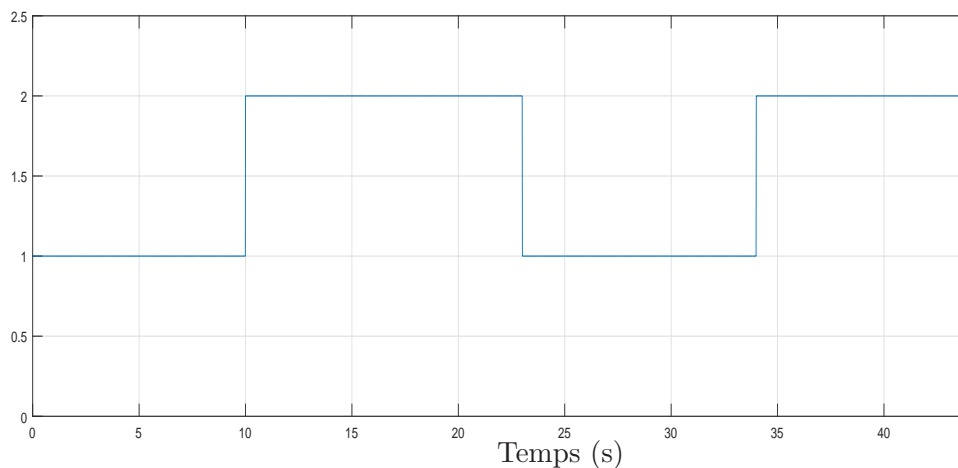


Figure 4.2 – Signal de commutation.

L'évolution de résidus est représentée sur la figure 4.3 où les lignes continues représentent le signal zéro et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure du vecteur résidu.

Il est important de noter que la condition (2.67) est respectée. Le temps de séjour du sous-système 1, par exemple, est de 10s qui est supérieure à 3.6396s ( la valeur minimale de temps de séjour).

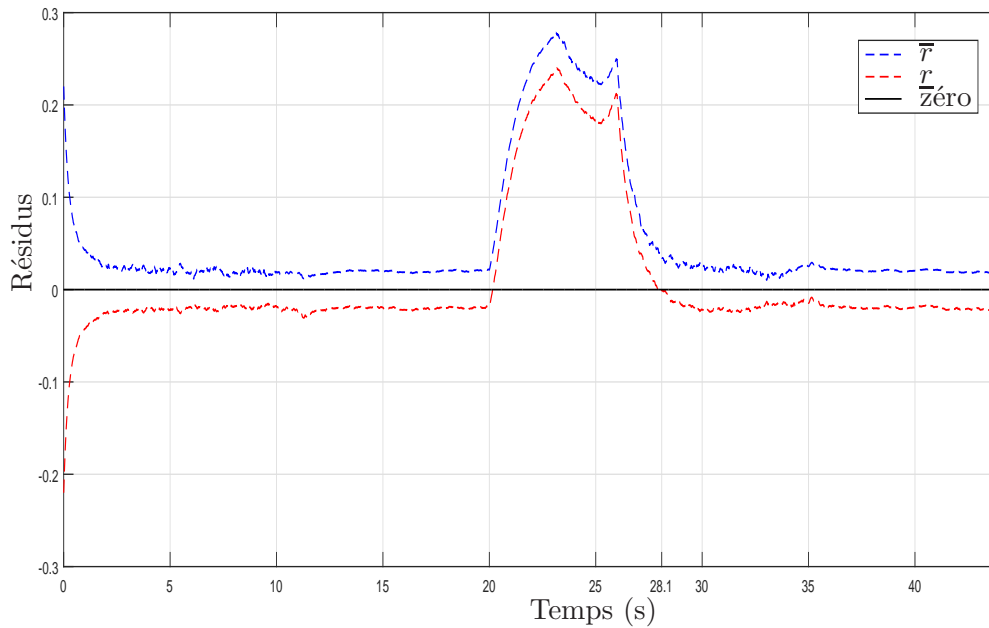


Figure 4.3 – Évolution de résidus.

D'après la figure 4.3,  $0 \notin [\underline{r}, \bar{r}]$  lorsque  $20s \leq t \leq 28.1s$  alors le défaut  $f$  a été bien détecté. Il est important de noter que même si le défaut disparaît le signal zéro est encore en dehors de l'intervalle délimité par  $\underline{r}$  et  $\bar{r}$ .

Les résultats de simulation démontrent l'efficacité de la technique proposée pour la détection de défauts pour des systèmes soumis à des bruits inconnus mais bornés. Cependant, la détection de défauts n'est pas totalement parfaite. En effet, l'évolution de vecteur résidu montre la détection d'un défaut même après l'instant de sa disparition et aussi avec un retard de détection de  $0.1s$ . Ceci est traduit par le fait que le défaut s'étend sur les deux modes du système à commutations ayant des dynamiques différentes.

La phase de détection de défauts est maintenant suivie par une étape de localisation de défauts. Elle consiste à déterminer l'élément en défaillance. Cette étape fait l'objet de la section suivante tout en considérant que le système linéaire à commutations est soumis à des incertitudes inconnues mais bornées.



## 4.4 Isolation de défaut pour les systèmes linéaires à commutations

### 4.4.1 Formulation du problème

Soit le système linéaire à commutations avec entrée inconnue défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q d(t) + w(t) + H_q f(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^p$ ,  $d \in \mathbb{R}^\delta$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ , et  $f \in \mathbb{R}^n$  sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée, la sortie, l'entrée inconnue, les perturbations, le bruit de mesure et le vecteur de défaut.

On s'intéresse dans cette section à la synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues. Ces derniers seront utilisés ultérieurement dans la phase de l'isolation de défauts par un banc d'observateurs à entrées inconnues.

### 4.4.2 Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues

Les observateurs à entrées inconnues sont réputés être des outils très efficaces pour la détection et l'isolation de défauts. Ils permettent de générer des résidus structurés permettant d'avoir des signaux significatifs sur les différentes occurrences de défauts.

Soit  $f(t) = 0$ . Ainsi, le système (4.18) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q d(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

On adopte dans cette section l'observateur intervalle proposé dans le troisième chapitre. Sa dynamique est rappelée par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\hat{z}}_1^+ = (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^+ + \check{B}_{1q} u + P_q^{-1} |P_q| \bar{w}_{1q} \\
 + P_q^{-1} \left[ P_q^+ \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) \right] \\
 + P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + L_q \tilde{y}_m + P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v} \\
 \\
 \dot{\hat{z}}_1^- = (\check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q) \hat{z}_1^- + \check{B}_{1q} u + P_q^{-1} (-|P_q|) \bar{w}_{1q} \\
 + P_q^{-1} \left[ P_q^+ \left( \gamma_q^+ \underline{y}_m - \gamma_q^- \bar{y}_m \right) - P_q^- \left( \gamma_q^+ \bar{y}_m - \gamma_q^- \underline{y}_m \right) \right] \\
 - P_q^{-1} |P_q| |\gamma_q| \bar{v} + L_q \tilde{y}_m - P_q^{-1} |P_q L_q| |U_{2q}| \bar{v}
 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Une estimation intervalle de l'état du système (4.19) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{x}_1 = (T_{1q}^+ + (-T_{2q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^+) \bar{z}_1 \\
 - (T_{1q}^- + (-T_{2q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^-) \underline{z}_1 + (T_{2q} U_{1q})^+ \bar{y}_m \\
 - (T_{2q} U_{1q})^- \underline{y}_m + (-T_{2q} U_{1q})^+ \bar{v} + (-T_{2q} U_{1q})^- \bar{v} \\
 \\
 \underline{x}_1 = (T_{1q}^+ + (-T_{2q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^+) \underline{z}_1 \\
 - (T_{1q}^- + (-T_{2q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^-) \bar{z}_1 + (T_{2q} U_{1q})^+ \underline{y}_m \\
 - (T_{2q} U_{1q})^- \bar{y}_m - (-T_{2q} U_{1q})^+ \bar{v} - (-T_{2q} U_{1q})^- \bar{v}
 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{x}_2 = (T_{3q}^+ + (-T_{4q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^+) \bar{z}_1 \\
 - (T_{3q}^- + (-T_{4q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^-) \underline{z}_1 + (T_{4q} U_{1q})^+ \bar{y}_m \\
 - (T_{4q} U_{1q})^- \underline{y}_m + (-T_{4q} U_{1q})^+ \bar{v} + (-T_{4q} U_{1q})^- \bar{v} \\
 \\
 \underline{x}_2 = (T_{3q}^+ + (-T_{4q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^+) \underline{z}_1 \\
 - (T_{3q}^- + (-T_{4q} U_{1q} C_q \Gamma_q)^-) \bar{z}_1 + (T_{4q} U_{1q})^+ \underline{y}_m \\
 - (T_{4q} U_{1q})^- \bar{y}_m - (-T_{4q} U_{1q})^+ \bar{v} - (-T_{4q} U_{1q})^- \bar{v}
 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$$\text{avec } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

### 4.4.3 Isolation de défaut

Dans cette section, une méthodologie d'isolation de défauts est proposée dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées en se basant sur l'utilisation d'un banc d'observateurs à entrées inconnues. D'une manière générale, il existe dans la littérature

plusieurs types de schémas d'isolation. On distingue principalement le schéma dédié ( Dedicated Scheme DS), proposé pour la première fois par Clark [Clark, 1978], et le schéma généralisé (Generalized Scheme GS), introduit par Frank [Frank, 1990b]. Pour les deux schémas, le nombre des observateurs constituant le banc d'observateurs est égale au nombre de défauts  $N_f$  pris en considération. Pour le DS, le  $i$ ème résidu est sensible seulement au  $i$ ème défaut,  $i = \overline{1, N_f}$ , mais découplé de tous les autres défauts. En contre partie, pour le GS, le  $i$ ème résidu est sensible à tous les défauts sauf le  $i$ ème défaut.

Dans un contexte ensembliste, l'évaluation de résidu est assurée à travers un test d'appartenance. Si le signal zéro est encadré par les résidus supérieur et inférieur, le système est dans son état de fonctionnement normal. Dans le cas contraire, un défaut s'est produit et le système est qualifié de défaillant. Pour le GS, si ,pour chaque sous-système, le signal zéro est délimité par les bornes supérieure et inférieure du  $i$ ème résidu et ne l'est pas par les bornes des autres résidus, alors une décision sur l'occurrence du  $i$ ème défaut est faite.

Les résidus supérieur et inférieur sont définis comme étant l'écart entre les sorties mesurées et les sorties estimées issues de l'observateur.

D'après le lemme 2.1, les bornes supérieure et inférieure des sorties estimées sont données par :

$$\begin{cases} \bar{y} = C_q^+ \bar{x} - C_q^- \underline{x} + \bar{v} \\ \underline{y} = C_q^+ \underline{x} - C_q^- \bar{x} - \bar{v} \end{cases} \quad (4.23)$$

Les bornes supérieure et inférieure du résidu sont désignées par :

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{y} - y_m \\ \underline{r} = \underline{y} - y_m \end{cases} \quad (4.24)$$

La figure 4.4 présente le GS d'isolation de défauts.

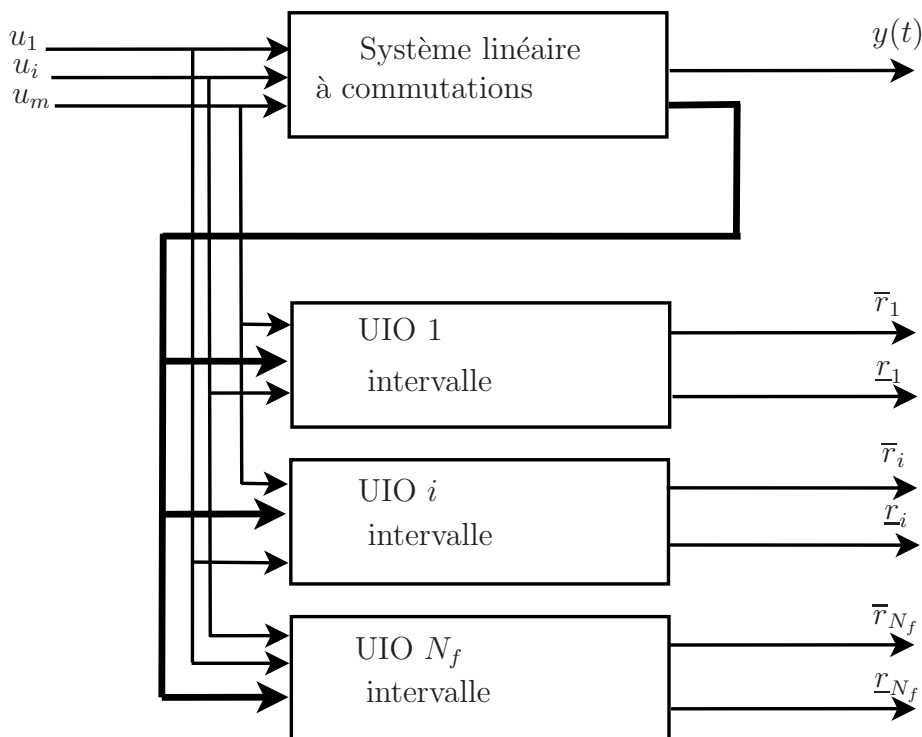


Figure 4.4 – Schéma généralisé d'isolation de défauts.

Le tableau 4.1 représente la matrice booléenne des signatures des défauts du GS d'isolation de défauts. Elle est décrite par des zéros sur la diagonale principale et des 1 hors de la diagonale. On désigne respectivement par 0 et 1 que le résidu est insensible et sensible à un défaut  $f_i$ .

Tableau 4.1 – Matrice des signatures des défauts du GS

$r_i \backslash f_i$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_{N_f-1}$	$f_{N_f}$
$r_1$	0	1	$\dots$	1	1
$r_2$	1	0	$\dots$	1	1
$\vdots$			$\ddots$		
$r_{N_f-1}$	1	1	$\dots$	0	1
$r_{N_f}$	1	1	$\dots$	1	0

Lest étapes nécessaires pour la conception du banc d'observateurs à entrées inconnues sont détaillées ci-après :

1. Vérifier la condition d'existence pour chaque observateur  $\forall q \in \mathcal{I}$

$$\text{rang}(C_q D_q^i) = \text{rang}(D_q^i) \quad (4.25)$$

2. Calculer les matrices  $T_q^i$  et  $U_q^i$  telles que

$$U_q^{-1i} = \begin{bmatrix} U_{1q}^i \\ U_{2q}^i \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$T_q^{-1i} = \begin{bmatrix} D_q^{*i} \\ D_q^{+i} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

3. Déterminer les gains d'observateurs  $L_q^i$ ,  $M_q^i$  et  $J_q^i$  en résolvant les LMIs décrites par (3.16).

#### 4.4.4 Exemple numérique

On considère le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q d(t) + w(t) + H_q f(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

Les matrices  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$ ,  $D_q$  et  $H_q$  sont choisies telles que :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

Les perturbations  $w(t)$  et le bruit de mesure  $v(t)$  sont des signaux uniformément distribués supposés bornés tels que  $-\bar{w} \leq w(t) \leq \bar{w}$  et  $-\bar{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$  avec  $\bar{w} = [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T \times 10^{-3}$  et  $\bar{v} = [0.01 \ 0.01]^T$ .

Le système à commutations est affecté par les défauts suivants :

$$f_1 = \begin{cases} 10s \leq t \leq 13s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 20s \leq t \leq 23s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} 45s \leq t \leq 50s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec les matrices  $H_i$  associées à chaque défaut  $f_i$  sont données comme suit :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $L_q^i$ ,  $M_q^i$  et  $J_q^i$  sont calculées de telle sorte que  $B_i$  est une matrice à deux colonnes et elle est obtenue en éliminant la  $i$ ème colonne de  $B$ .

Le banc d'observateurs est construit comme suit :

1. La condition d'existence est satisfaite pour chaque observateur  $\forall q \in \mathcal{I}$

2. Les matrices  $T_q^i$  et  $U_q^i$  sont alors calculées :

$$T_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 1 \\ 0.5145 & 0.8575 & 0 & 0 \\ 0.7353 & -0.4412 & 0.3 & 0 \\ -0.4412 & 0.2647 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, U_1^1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} -0.3244 & -0.6489 & 0.4867 & 0.3 \\ 0.9292 & -0.1416 & -0.1416 & 0.2 \\ -0.1416 & 0.7168 & 0.2124 & 0.4 \\ 0.1062 & 0.2124 & 0.8407 & -0.3 \end{bmatrix}, U_2^1 = \begin{bmatrix} -0.33 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8944 \\ -0.4 & 0 & 0.4472 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} -0.4867 & -0.8111 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8212 & -0.2980 & 0.3 & 0 \\ -0.2980 & 0.5033 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, U_1^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.8321 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5547 \end{bmatrix}$$

$$T_2^2 = \begin{bmatrix} -0.3244 & -0.6489 & 0.4867 & 0.3 \\ 0.9292 & -0.1416 & 0.1062 & 0.2 \\ -0.1416 & 0.7168 & 0.2124 & 0.4 \\ 0.1062 & 0.2124 & 0.8407 & -0.3 \end{bmatrix}, U_2^2 = \begin{bmatrix} -0.3300 & 0 & -0.7714 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.6364 \end{bmatrix}$$

$$T_1^3 = \begin{bmatrix} -0.3168 & -0.8728 & 0.2 & 0 \\ -0.9400 & 0.3412 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0.1267 & 0.3491 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, U_1^3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} -0.3244 & -0.6489 & 0.4867 & 0.3 \\ 0.9292 & -0.1416 & 0.1062 & 0.2 \\ -0.1416 & 0.7168 & 0.2124 & 0.4 \\ 0.1062 & 0.2124 & 0.8407 & -0.3 \end{bmatrix}, U_2^3 = \begin{bmatrix} -0.33 & 0 & -0.5183 \\ 0.2 & 0 & -0.8552 \\ -0.4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Calculer les matrices  $L_q^i$ ,  $M_q^i$  et  $J_q^i$  en résolvant les LMIs définis par (3.16). Une solution de ces LMIs, pour chaque UIO intervalle, est donnée ci-après :

– Paramètres de l’observateur intervalle à entrée inconnue 1 :

$$L_1^1 = \begin{bmatrix} -0.6711 \\ -1.0924 \end{bmatrix}, L_2^1 = \begin{bmatrix} 20.7933 \\ -12.6216 \end{bmatrix},$$

$$M_1^1 = \begin{bmatrix} 1.7177 & 1.2415 \\ 1.2415 & 3.0240 \end{bmatrix}, M_2^1 = \begin{bmatrix} 0.1240 & 0.1370 \\ 0.1370 & 0.2681 \end{bmatrix},$$

$$J_1^1 = \begin{bmatrix} 1.2409 & -0.1216 \\ -0.1216 & 1.1112 \end{bmatrix}, J_2^1 = \begin{bmatrix} 0.9021 & -0.2724 \\ -0.2724 & 0.4935 \end{bmatrix}$$

– Paramètres de l’observateur intervalle à entrée inconnue 2 :

$$L_1^2 = \begin{bmatrix} -0.8066 \\ 0.3678 \end{bmatrix}, L_2^2 = \begin{bmatrix} 5.7638 \\ -21.5774 \end{bmatrix},$$

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} 3.3536 & 0.7732 \\ 0.7732 & 1.1355 \end{bmatrix}, M_2^2 = \begin{bmatrix} 0.3120 & 0.0787 \\ 0.0787 & 0.0645 \end{bmatrix},$$

$$J_1^2 = \begin{bmatrix} 1.1023 & -0.1778 \\ -0.1778 & 1.2972 \end{bmatrix}, J_2^2 = \begin{bmatrix} 0.2842 & 0.1233 \\ 0.1233 & 0.9756 \end{bmatrix}$$

– Paramètres de l’observateur intervalle à entrée inconnue 3 :

$$L_1^3 = \begin{bmatrix} -0.5442 \\ 1.3642 \end{bmatrix}, L_2^3 = \begin{bmatrix} -11.3939 \\ -11.4081 \end{bmatrix},$$

$$M_1^3 = \begin{bmatrix} 81.1566 & -37.3479 \\ -37.3479 & 60.3864 \end{bmatrix}, M_2^3 = \begin{bmatrix} 6.5388 & -3.9919 \\ -3.9919 & 5.1483 \end{bmatrix},$$

$$J_1^3 = \begin{bmatrix} 37.4698 & 5.5363 \\ 5.5363 & 50.7144 \end{bmatrix}, J_2^3 = \begin{bmatrix} 33.8853 & 6.7421 \\ 6.7421 & 6.6021 \end{bmatrix}$$

Il n’était pas possible de trouver des gains d’observateurs  $L_q$  tels que  $(\check{A}_q - L_q\check{C}_q)$  sont de type Metzler. Néanmoins, on peut utiliser des différentes matrices de transformation  $P_1^i$  et  $P_2^i$  pour assurer la propriété de coopérativité. Ensuite, des observateurs intervalles



peuvent être synthétisés.

Les matrices de transformation  $P_1^i$  et  $P_2^i$  sont déterminées telles que  $P_q^i (\check{A}_q - L_q \check{C}_q) P_q^{-1^i}$  soient de type Metzler pour tout  $q \in \mathcal{I}$ .

La commutation entre les deux sous-systèmes est régie par le signal de commutation indiqué sur la figure 4.5.

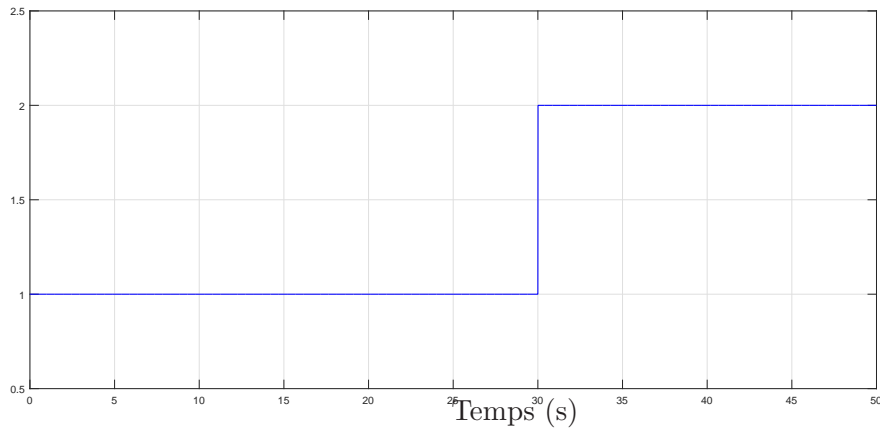


Figure 4.5 – Signal de commutation.

Les évolutions des résidus issus des observateurs intervalles à entrée inconnue 1, 2 et 3 sont représentées sur les figures 4.6-1.1. Les lignes continues représentent le signal zéro et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure du vecteur résidu.

Pour le premier défaut (figure 4.6), les résidus issus du premier observateur intervalle sont sensibles aux deuxième et troisième défauts. Donc, le premier défaut est complètement isolé. De même, les résultats de simulation montrent que les deux autres défauts sont complètement isolés.

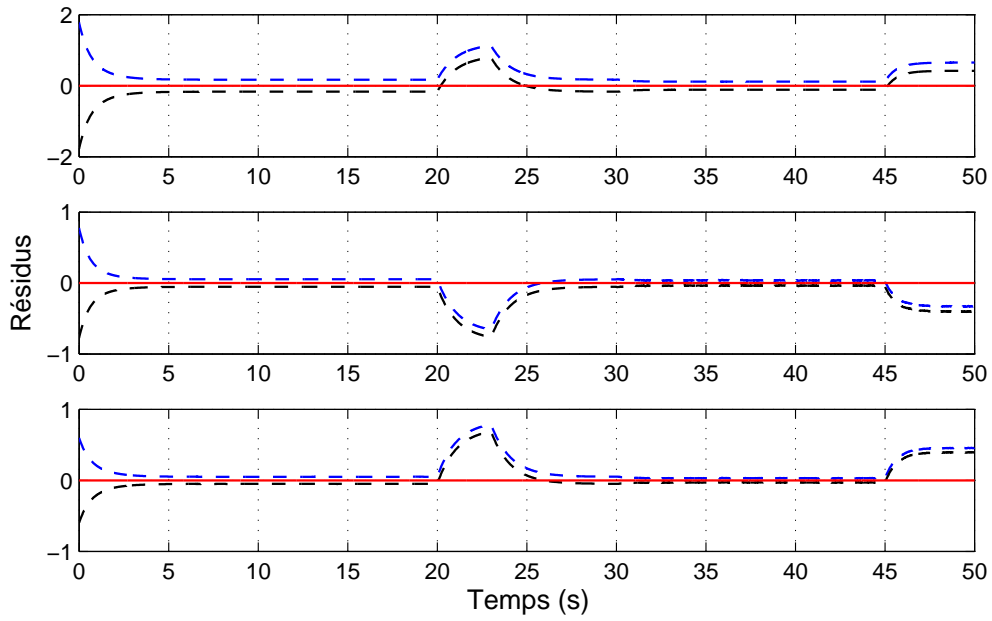


Figure 4.6 – Résidus résultants de l'observateur intervalle 1.

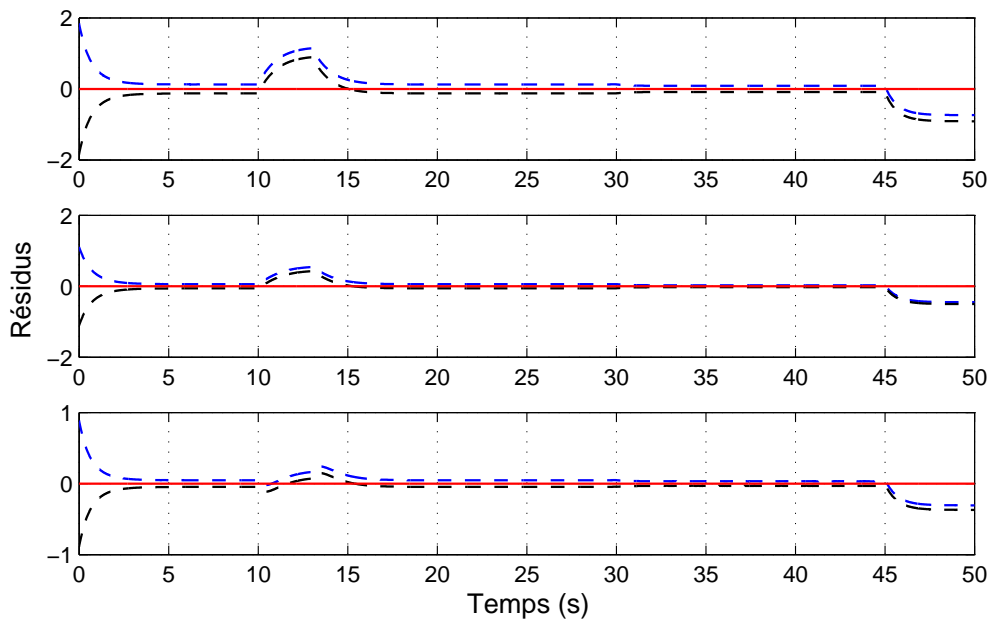


Figure 4.7 – Résidus résultants de l'observateur intervalle 2.

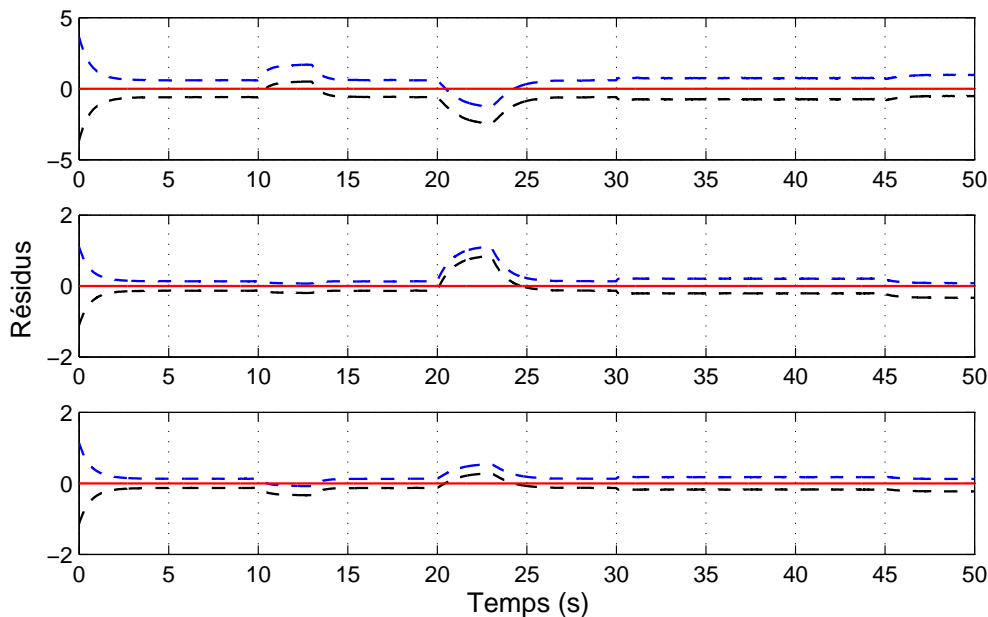


Figure 4.8 – Résidus résultants de l'observateur intervalle 3.

## 4.5 Estimation de défaut pour les systèmes linéaires à commutations

### 4.5.1 Formulation du problème

Après la phase de détection et d'isolation, l'estimation de défauts est nécessaire. Il existe plusieurs méthodes d'estimation de défauts dans la littérature. Nous proposons dans cette section d'étendre les résultats obtenus dans le chapitre précédent pour estimer les bornes supérieure et inférieure du défaut en utilisant les observateurs intervalles à entrées inconnues.

Soit le système linéaire à commutations décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) + D_q f(t) + w(t) \\ y_m(t) = C_q x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.29)$$

On rappelle que :

$$z_2 = U_{1q} y_m - U_{1q} C_q \Gamma_q z_1 - U_{1q} v \quad (4.30)$$

La dérivée de (4.30) donne :

$$\dot{z}_2 = U_{1q}\dot{\chi} - U_{1q}C_q\Gamma_q\dot{z}_1 \quad (4.31)$$

avec

$$\chi = y_m - v \quad (4.32)$$

D'après la deuxième équation de (3.7) et (4.31) on a :

$$f = U_{1q}\dot{\chi} + F_{1q}z_1 + F_{2q}y_m + F_{3q}u + F_{4q}v + F_{5q}\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2 \quad (4.33)$$

où

$$\begin{aligned} F_{1q} &= \left[ -U_{1q}C_q\Gamma_q\tilde{A}_{1q} + U_{1q}C_q\Gamma_q\tilde{A}_{2q}U_{1q}C_q\Gamma_q - \tilde{A}_{3q} + \tilde{A}_{4q}U_{1q}C_q\Gamma_q \right] \\ F_{2q} &= \left[ -U_{1q}C_q\Gamma_q\tilde{A}_{2q}U_{1q} - \tilde{A}_{4q}U_{1q} \right] \\ F_{3q} &= \left[ -U_{1q}C_q\Gamma_q\tilde{B}_{1q} - \tilde{B}_{2q} \right] \\ F_{4q} &= \left[ U_{1q}C_q\Gamma_q\tilde{A}_{2q}U_{1q} + \tilde{A}_{4q}U_{1q} \right], \quad F_{5q} = \left[ -U_{1q}C_q\Gamma_q \right] \end{aligned}$$

Il est important de noter qu'il existe plusieurs techniques de différenciation. Les observateurs à grand gain et les observateurs à modes glissants d'ordre supérieure présentent les approches les plus utilisées pour estimer les dérivées d'un tel signal en présence de bruit borné. On s'intéresse à l'utilisation d'un observateur à grand gain de second ordre (4.2) pour estimer la dérivée première de  $\chi$ .

Les bornes supérieure et inférieure du défaut  $f$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f} = U_{1q}^+\bar{\chi} - U_{1q}^-\dot{\chi} + F_{1q}^+\bar{z}_1 - F_{1q}^-\underline{z}_1 + F_{2q}^+\bar{y}_m - F_{2q}^-\underline{y}_m + F_{3q}u \\ \quad + F_{4q}^+\bar{v} + F_{4q}^-\underline{v} + F_{5q}^+\bar{\tilde{w}}_{1q} + F_{5q}^-\underline{\tilde{w}}_{1q} + \bar{\tilde{w}}_{2q} \\ \\ \underline{f} = U_{1q}^+\dot{\chi} - U_{1q}^-\bar{\chi} + F_{1q}^+\underline{z}_1 - F_{1q}^-\bar{z}_1 + F_{2q}^+\underline{y}_m - F_{2q}^-\bar{y}_m + F_{3q}u \\ \quad - F_{4q}^+\underline{v} - F_{4q}^-\bar{v} - F_{5q}^+\underline{\tilde{w}}_{1q} - F_{5q}^-\bar{\tilde{w}}_{1q} - \underline{\tilde{w}}_{2q} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

**Théorème 4.1** Si toutes les conditions du théorème 3.2 sont vérifiées, alors l'inégalité

suivante est vraie

$$\underline{f}(t) \leq f(t) \leq \overline{f}(t) \quad (4.35)$$

et  $\overline{f} - \underline{f}$  convergent vers un vecteur constant  $\mathcal{D}$ .

**Preuve 4.1** On considère les erreurs d'observation supérieure et inférieure du défaut  $f$  décrit respectivement par  $\overline{e}_f = \overline{f} - f$  et  $\underline{e}_f = f - \underline{f}$ .

Étant donné que  $A = A^+ - A^-$ ,  $\overline{e}_f$  et  $\underline{e}_f$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \overline{e}_f &= U_{1q}^+ (\overline{\chi} - \dot{\chi}) + U_{1q}^- (\dot{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) + F_{1q}^+ \overline{e}_{z_1} + F_{1q}^- \underline{e}_{z_1} + (F_{2q}^+ + F_{2q}^-) \overline{v} \\ &\quad + F_{4q}^+ (\overline{v} - v) + F_{4q}^- (v + \overline{v}) + F_{5q}^+ (\overline{\tilde{w}}_{1q} - \tilde{w}_{1q}) \\ &\quad + F_{5q}^- (\tilde{w}_{1q} + \overline{\tilde{w}}_{1q}) + (\overline{\tilde{w}}_{2q} + \tilde{w}_{2q}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \underline{e}_f &= U_{1q}^+ (\dot{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) + U_{1q}^- (\overline{\chi} - \dot{\chi}) + F_{1q}^+ \underline{e}_{z_1} + F_{1q}^- \overline{e}_{z_1} + (F_{2q}^+ + F_{2q}^-) \overline{v} \\ &\quad + F_{4q}^+ (v + \overline{v}) + F_{4q}^- (\overline{v} - v) + F_{5q}^+ (\tilde{w}_{1q} + \overline{\tilde{w}}_{1q}) \\ &\quad + F_{5q}^- (\overline{\tilde{w}}_{1q} - \tilde{w}_{1q}) + (\overline{\tilde{w}}_{2q} - \tilde{w}_{2q}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

D'après (4.3), l'erreur de différenciation est bornée par  $b_1(\varepsilon)$ . Ainsi, les équations (4.38)-(4.39) sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1q} &= U_{1q}^+ (\overline{\chi} - \dot{\chi}) + U_{1q}^- (\dot{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) \\ &= U_{1q}^+ (\hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) - \dot{\chi}) + U_{1q}^- (-\hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) + \dot{\chi}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2q} &= U_{1q}^+ (\dot{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) + U_{1q}^- (\overline{\chi} - \dot{\chi}) \\ &= U_{1q}^+ (-\hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) + \dot{\chi}) + U_{1q}^- (\hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) - \dot{\chi}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) + \dot{\chi} \leq 2b_1(\varepsilon), \\ 0 &\leq \hat{x}_1 + b_1(\varepsilon) - \dot{\chi} \leq 2b_1(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ce qui implique que

$$\mathcal{A}_{1q} \geq 0 \quad (4.41)$$

$$\mathcal{A}_{2q} \geq 0 \quad (4.42)$$

D'après le lemme 2.1 et à partir de (4.41) et (4.42), les erreurs d'observation  $\bar{e}_f$  et  $\underline{e}_f$  sont positives.

Soit l'erreur totale  $e_f$  définit par :

$$\begin{aligned} e_f &= \bar{f} - \underline{f} \\ &= \bar{f} - f + f - \underline{f} \\ &= \bar{e}_f + \underline{e}_f \\ &= U_{1q}^+ (\bar{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) + U_{1q}^- (\bar{\dot{\chi}} - \underline{\chi}) + (F_{1q}^+ + F_{1q}^-) (\bar{e}_{z_1} + \underline{e}_{z_1}) \\ &\quad + 2(F_{2q}^+ + F_{2q}^-) \bar{v} + 2(F_{4q}^+ + F_{4q}^-) \bar{v} + 2(F_{5q}^+ + F_{5q}^-) \bar{w}_{1q} + 2\bar{w}_{2q} \\ &= |U_{1q}| (\bar{\chi} - \underline{\dot{\chi}}) + |F_{1q}| \bar{e}_{z_1} + |F_{1q}| \underline{e}_{z_1} + 2|F_{2q}| \bar{v} + 2|F_{4q}| \bar{v} \\ &\quad + 2|F_{5q}| \bar{w}_{1q} + 2\bar{w}_{2q} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Alors, d'après (3.51), (3.52) et (4.43) on a

$$e_f \leq \mathcal{D} \quad (4.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -2|F_{1q}| |P_q^{-1}| \left( P_q \left( \check{A}_{1q} - L_q \check{C}_q \right) P_q^{-1} \right)^{-1} \mathcal{C}_1 + 2|U_{1q}| b_1(\varepsilon) \\ &\quad + 2(|F_{2q}| + |F_{4q}|) \bar{v} + 2|F_{5q}| \bar{w}_{1q} + 2\bar{w}_{2q} \end{aligned} \quad (4.45)$$

En se basant sur le théorème 2 dans [Gouzé et al., 2000], l'erreur totale  $e_f$  est asymptotiquement inférieure élément par élément à un vecteur constant  $\mathcal{D}$ . Ainsi, les trajectoires supérieure et inférieure du défaut  $f$  sont bornées.

## 4.5.2 Exemple numérique

On reprend le même exemple numérique utilisé dans le troisième chapitre page 92. Pour estimer le défaut  $f$ , les bornes supérieure et inférieure de la dérivée de sortie sont calculées à l'aide d'un observateur à grand gain de second ordre. Le paramètre  $\varepsilon$  est choisi tel que  $\varepsilon = 0.03$ .

Ainsi, les trajectoires supérieure et inférieure du défaut sont représentées sur la figure 4.9 où les lignes continues présentent le défaut et les lignes en pointillés correspondent aux bornes supérieure et inférieure du défaut. On remarque que  $f$  est encadré par  $\bar{f}$  et  $\underline{f}$  pour tout  $t \geq 0$ .

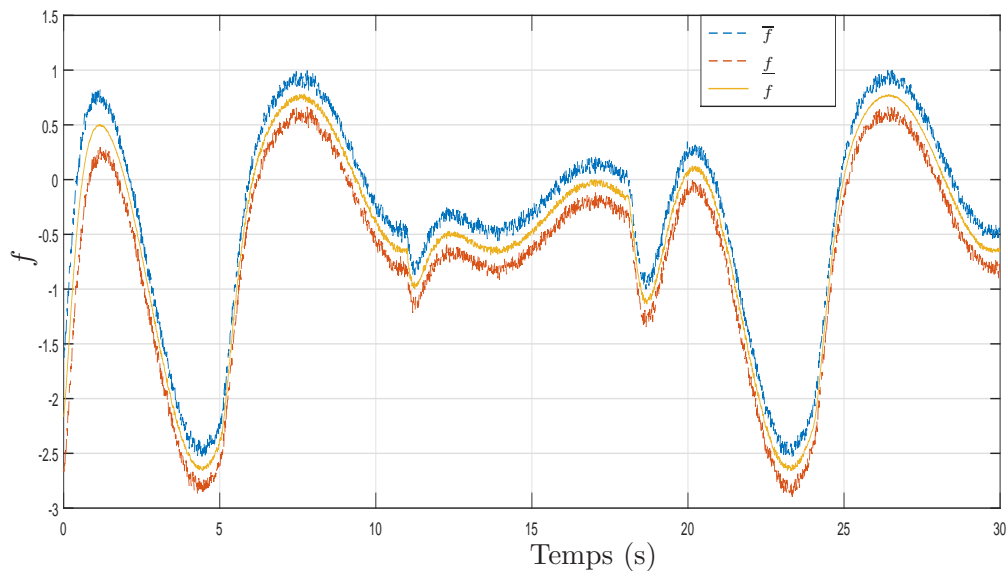


Figure 4.9 – Les trajectoires supérieure et inférieure de  $f$ .

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré au diagnostic des systèmes linéaires à commutations dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées. En se basant sur les observateurs intervalles, nous avons proposé de nouvelles techniques pour la détection et l'isolation de défauts ainsi que pour l'estimation de défauts.

La première méthode est dédiée à la détection de défauts. Un observateur intervalle est synthétisé pour calculer les bornes supérieure et inférieure de l'état. Le principe de la méthodologie proposée consiste à générer en premier lieu deux vecteurs de résidus intervalles. Ils sont déterminés en calculant l'écart entre les mesures réelles et les mesures estimées à partir de l'observateur intervalle. En deuxième lieu, une évaluation des résidus est faite pour indiquer la présence d'un défaut.

La deuxième méthode développée permet l'isolation de défauts par approche ensembliste. L'idée de base consiste à utiliser un banc d'observateurs intervalles à entrées inconnues. Le schéma généralisé GS d'isolation de défaut est adopté dans cette technique où le  $i^{me}$  résidu est calculé de telle sorte qu'il soit sensible à tout les défauts sauf le  $i^{me}$  défaut.

La troisième partie de ce chapitre est consacrée à l'estimation de défaut étant donné qu'il est considéré comme une entrée inconnue.



# Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire s'intéressent aux problèmes liés à l'observation, la détection et la localisation de défauts pour les systèmes linéaires à commutations. Ce type de systèmes présente une classe importante des systèmes dynamiques hybrides. Ils sont constitués d'une famille des sous-systèmes ou modes et une loi de commutation qui contrôle la commutation entre eux. À chaque instant, un seul mode est actif. Dans un contexte à erreurs inconnues mais bornées, nous avons proposé des méthodes de diagnostic pour les systèmes linéaires à commutations.

Dans le premier chapitre, un état de l'art sur les différentes thématiques de nos travaux de recherche a été présenté. La première partie constitue une présentation de différentes approches de modélisation, d'observabilité et d'analyse de stabilité des systèmes à commutations. La deuxième partie de ce chapitre introductif vise à rappeler les terminologies utilisées dans le domaine du diagnostic ainsi que les méthodes de diagnostic existant dans la littérature. La troisième partie aborde quelques travaux portant sur la synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LTI, LTV et LPV.

Dans le deuxième chapitre, nous avons développé de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations soumis à des incertitudes. Ces incertitudes sont supposées inconnues mais bornées et de bornes connues a priori. La première méthode vise à trouver des gains d'observateurs permettant d'avoir des erreurs d'observation, supérieure et inférieure, positives. La deuxième approche est développée pour relaxer la propriété de positivité à travers des changements de coordonnées. L'idée majeure est de reconstruire deux observateurs ponctuels dans la base d'origine " $x$ ".

Le troisième chapitre est dédié à la synthèse d'observateur intervalle à entrée inconnue pour les systèmes linéaires à commutations. Un observateur intervalle à entrée inconnue a été proposé en se basant sur la méthode de découplage de l'entrée inconnue. Deux trajectoires supérieure et inférieure sont alors calculées.

Le quatrième chapitre est consacré au diagnostic des systèmes à commutations par approche ensembliste. Nous avons étendu les résultats obtenus dans le deuxième chapitre pour proposer des approches de détection de défauts. Ainsi, l'observateur intervalle proposé dans le troisième chapitre nous a permis de synthétiser une technique d'isolation de défauts. Ensuite, une méthode d'estimation de défaut a été proposée.

En perspective des travaux réalisés, certains points restent à analyser et à développer.

Tout au long de ce mémoire, le signal de commutation est supposé connu. Malheureusement, cette hypothèse est assez restrictive d'un point de vue pratique. Il serait donc intéressant d'estimer l'état discret et de retravailler également les travaux proposés dans cette thèse avec le nouveau signal de commutation estimé. Ainsi, une comparaison entre les méthodes proposées et celles à développer sera envisagée. L'estimation du signal à commutation fait partie de nos objectifs à court terme.

Toutes les techniques proposées dans cette thèse pour le diagnostic des systèmes à commutations sont validées par des simulations numériques. Ainsi, l'application pratique de ces méthodes sur des procédés réels est une perspective très intéressante.

Une autre piste à développer serait l'extension de ce mémoire à d'autres classes de systèmes à commutations à savoir les systèmes linéaires à commutations à paramètres variants.

Une direction à élaborer concerne le diagnostic des systèmes à commutations en temps discret par l'analyse par intervalle. En fait, toutes les conditions de stabilité et de positivité des erreurs d'observation seront changées.

À l'issue du dernier chapitre, une étude supplémentaire peut être faite. Elle portera sur

l'influence du paramètre " $\epsilon$ " dans l'estimation de l'entrée inconnue. Il serait intéressant de proposer une méthode permettant d'avoir le choix optimal du paramètre " $\epsilon$ ".

Dans le cadre d'une estimation ensembliste, une représentation sous forme centrée pourra être considérée pour l'estimation de l'état. Donc, une représentation de type zonotopes pourra faire l'objet des futures travaux.

# Bibliographie

- [Arichi, 2015] ARICHI, F. (2015). *Estimation d'état pour des systèmes décrits par les réseaux de Petri : des systèmes à événements discrets aux systèmes dynamiques hybrides*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes.
- [Arichi et al., 2013] ARICHI, F., CHERKI, B. et DJEMAI, M. (2013). State and firing sequence estimation of petri net application to : Manufacturing sysems. *In IEEE International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2013*, pages 608–613.
- [Arichi et al., 2015] ARICHI, F., DJEMAI, M., CHERKI, B. et MANAMANNI, N. (2015). Continuous and discrete state estimation for a class of nonlinear switched systems. *IEEE Trans. On Circuits and Systems II*, 62(7):691–695.
- [Basseville, 1988] BASSEVILLE, M. (1988). Detecting changes in signals and systems-a survey. *Automatica*, 24(3):309–326.
- [Basseville, 1997] BASSEVILLE, M. (1997). Information criteria for residual generation and fault detection and isolation. *Automatica*, 33(5):783–803.
- [Batis, 2013] BATIS, S. (2013). *Commande d'une classe de systèmes hybrides par automates hybrides rectangulaires*. Thèse de doctorat, Grenoble.
- [Bejarano et Pisano, 2011] BEJARANO, F. J. et PISANO, A. (2011). Switched observers for switched linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):681–686.
- [Belkhiat et al., 2012] BELKHIAT, D., MANAMANNI, N., MESSAI, N. et DJEMAI, M. (2012). Fault detection & isolation for a class of hybrid systems : A dedicated switched robust observer scheme. *In 20th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), 2012*, pages 984–989. IEEE.

- [Belkhiat *et al.*, 2011] BELKHIAT, D., MESSAI, N. et MANAMANNI, N. (2011). Design of a robust fault detection based observer for linear switched systems with external disturbances. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 5(2):206–219.
- [Birouche, 2006] BIROUCHE, A. (2006). *Contribution sur la synthèse d’observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL.
- [Birouche *et al.*, 2006] BIROUCHE, A., DAAFOUZ, J. et IUNG, C. (2006). Observer design for a class of discrete time piecewise-linear systems. *In Analysis and Design of Hybrid Systems 2006*, pages 12–17. Elsevier.
- [Blanke *et al.*, 2006] BLANKE, M., KINNAERT, M., LUNZE, J., STAROSWIECKI, M. et SCHRÖDER, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*, volume 2. Springer.
- [Branicky, 1995] BRANICKY, M. S. (1995). Studies in hybrid systems : Modeling, analysis, and control. Rapport technique, MASSACHUSETTS INST OF TECH CAMBRIDGE LAB FOR INFORMATION AND DECISION SYSTEMS.
- [Branicky, 1998] BRANICKY, M. S. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475–482.
- [Cébron, 2000] CÉBRON, B. (2000). *Commande de systèmes dynamiques hybrides*. Thèse de doctorat, INSA de Rennes.
- [Chantier *et al.*, 1998] CHANTIER, M., COGHILL, G. M., SHEN, Q. et LEITCH, R. (1998). Selecting tools and techniques for model-based diagnosis. *Artificial Intelligence in Engineering*, 12(1-2):81–98.
- [Chebotarev *et al.*, 2015] CHEBOTAREV, S., EFIMOV, D., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2015). Interval observers for continuous-time lpv systems with L1/L2 performance. *Automatica*, 58:82–89.
- [Chen et Patton, 2012] CHEN, J. et PATTON, R. J. (2012). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, volume 3. Springer Science & Business Media.
- [Chen *et al.*, 1996] CHEN, J., PATTON, R. J. et ZHANG, H.-Y. (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of control*, 63(1):85–105.

- [Chiang *et al.*, 2000] CHIANG, L. H., RUSSELL, E. L. et BRAATZ, R. D. (2000). *Fault detection and diagnosis in industrial systems*. Springer Science & Business Media.
- [Clark, 1978] CLARK, R. N. (1978). Instrument fault detection. *IEEE Transactions on Aerospace and electronic systems*, (3):456–465.
- [Cocquempot *et al.*, 2004] COCQUEMPOT, V., EL MEZYANI, T. et STAROSWIECKI, M. (2004). Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals. *In 5th IEEE Asian Control Conference, 2004.*, volume 2, pages 1204–1212.
- [Combastel et Raka, 2011] COMBASTEL, C. et RAKA, S.-A. (2011). A stable interval observer for lti systems with no multiple poles. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):14335–14341.
- [Degue *et al.*, 2016] DEGUE, K., EFIMOV, D. et RICHARD, J.-P. (2016). Interval observers for hybrid linear systems. *In 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Monterey.
- [Ding *et al.*, 2002] DING, S., FRANK, P. et DING, E. (2002). An approach to the detection of multiplicative faults in uncertain dynamic systems. *In D Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, volume 4, pages 4371–4376.
- [Ding, 2008] DING, S. X. (2008). *Model-based fault diagnosis techniques : design schemes, algorithms, and tools*. Springer Science & Business Media.
- [Dinh *et al.*, 2015] DINH, T. N., ANDRIEU, V., NADRI, M. et SERRES, U. (2015). Continuous-discrete time observer design for lipschitz systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(3):787–792.
- [Djemai et Defoort, 2014] DJEMAI, M. et DEFOORT, M. (2014). *Hybrid Dynamical Systems : Observation and Control*, volume 457. Springer.
- [Djemai et Defoort, 2015] DJEMAI, M. et DEFOORT, M. (2015). *Hybrid Dynamical Systems*. Springer.
- [Efimov *et al.*, 2012a] EFIMOV, D., FRIDMAN, L., RAÏSSI, T., ZOLGHADRI, A. et SEYDOU, R. (2012a). Interval estimation for lpv systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9):2365–2371.
- [Efimov *et al.*, 2013a] EFIMOV, D., PERRUQUETTI, W., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2013a). Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12):3218–3224.

- [Efimov *et al.*, 2013b] EFIMOV, D., PERRUQUETTI, W., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2013b). On interval observer design for time-invariant discrete-time systems. *In IEEE European Control Conference (ECC), 2013*, pages 2651–2656.
- [Efimov *et al.*, 2012b] EFIMOV, D., RAÏSSI, T., CHEBOTAREV, S. et ZOLGHADRI, A. (2012b). On set-membership observer design for a class of periodical time-varying systems. *In 51st IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2012*, pages 6767–6772.
- [Efimov *et al.*, 2013c] EFIMOV, D., RAÏSSI, T., CHEBOTAREV, S. et ZOLGHADRI, A. (2013c). Interval state observer for nonlinear time varying systems. *Automatica*, 49(1):200–205.
- [Efimov *et al.*, 2013d] EFIMOV, D., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2013d). Control of nonlinear and lpv systems : interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3):773–778.
- [El Hachemi, 2012] EL HACHEMI, F. (2012). *Analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine.
- [Ethabet *et al.*, 2018a] ETHABET, H., RABEHI, D., EFIMOV, D. et RAÏSSI, T. (2018a). Interval estimation for continuous-time switched linear systems. *Automatica*, 90:230–238.
- [Ethabet *et al.*, 2017] ETHABET, H., RAÏSSI, T., AMAIRI, M. et AOUN, M. (2017). Interval observers design for continuous-time linear switched systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):6259–6264.
- [Ethabet *et al.*, 2018b] ETHABET, H., RAÏSSI, T., AMAIRI, M., COMBASTEL, C. et AOUN, M. (2018b). Interval observer design for continuous-time switched systems under known switching and unknown inputs. *International Journal of Control*, 0(0):1–14.
- [Francart et Thirouin, 2005] FRANCAERT, L. et THIROUIN, P. (2005). Les systèmes hybrides.
- [Frank, 1990a] FRANK, P. M. (1990a). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *automatica*, 26(3):459–474.

- [Frank, 1990b] FRANK, P. M. (1990b). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *automatica*, 26(3):459–474.
- [Frank et Ding, 1997] FRANK, P. M. et DING, X. (1997). Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of process control*, 7(6):403–424.
- [Galván-Guerra *et al.*, 2017] GALVÁN-GUERRA, R., FRIDMAN, L. et DÁVILA, J. (2017). High-order sliding-mode observer for linear time-varying systems with unknown inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(14):2338–2356.
- [Gao *et al.*, 2017] GAO, N., DAROUACH, M. et ALMA, M. (2017).  $h_\infty$  dynamic observer design for linear discrete-time systems. In *20th IFAC World Congress, IFAC 2017*.
- [Gao et Yan, 2010] GAO, R. X. et YAN, R. (2010). *Wavelets : Theory and applications for manufacturing*. Springer Science & Business Media.
- [Gertler, 2015] GERTLER, J. (2015). *Fault Detection and Diagnosis*. Springer.
- [Ghomri et Hassane, 2015] GHOMRI, L. et HASSANE, A. (2015). Continuous petri nets and hybrid automata for the analysis of manufacturing systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(3):1024–1029.
- [Gouzé *et al.*, 2000] GOUZÉ, J.-L., RAPAPORT, A. et HADJ-SADOK, M. Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological modelling*, 133(1):45–56.
- [Hammouri *et al.*, 1999] HAMMOURI, H., KINNAERT, M. et EL YAAGOUBI, E. (1999). Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control*, 44(10):1879–1884.
- [Hardy *et al.*, 1952] HARDY, G., LITTLEWOOD, J. et PÓLYA, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.
- [He et Xie, 2015] HE, Z. et XIE, W. (2015). Interval state observer for nonlinear switched systems with average dwell time. In *34th IEEE Chinese Control Conference (CCC)*, pages 2285–2288.
- [He et Xie, 2016] HE, Z. et XIE, W. (2016). Control of non-linear switched systems with average dwell time : interval observer-based framework. *IET Control Theory & Applications*, 10(1):10–16.



- [Hespanha et Morse, 1999] HESPANHA, J. P. et MORSE, A. S. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999.*, volume 3, pages 2655–2660.
- [Hetel, 2007] HETEL, L. (2007). *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL.
- [Hu et al., 2002] HU, B., ZHAI, G. et MICHEL, A. N. (2002). Common quadratic lyapunov-like functions with associated switching regions for two unstable second-order lti systems. *International Journal of Control*, 75(14):1127–1135.
- [Ifqir et al., ] IFQIR, S., OUFROUKH, N. A., ICHALAL, D. et MAMMAR, S. Switched interval observer for uncertain continuous-time systems. in *Proc. 20th IFAC WC 2017*.
- [Isermann, 1995] ISERMANN, R. (1995). Model base fault detection and diagnosis methods. *In Proceedings of the IEEE American Control Conference, 1995*, volume 3, pages 1605–1609.
- [Isermann, 2005] ISERMANN, R. (2005). Model-based fault-detection and diagnosis—status and applications. *Annual Reviews in control*, 29(1):71–85.
- [Isermann, 2006] ISERMANN, R. (2006). *Fault-diagnosis systems : an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media.
- [Isermann et Ballé, 1996] ISERMANN, R. et BALLÉ, P. (1996). Trends in the application of model based fault detection and diagnosis of technical processes. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1):6325–6336.
- [Isermann et Balle, 1997] ISERMANN, R. et BALLE, P. (1997). Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control engineering practice*, 5(5):709–719.
- [Isermann et al., 2002] ISERMANN, R., SCHWARZ, R. et STOLZL, S. (2002). Fault-tolerant drive-by-wire systems. *IEEE Control Systems*, 22(5):64–81.
- [Jiang et Zhou, 2005] JIANG, C. et ZHOU, D. (2005). Fault detection and identification for uncertain linear time-delay systems. *Computers & chemical engineering*, 30(2):228–242.
- [Jiang et al., 2008] JIANG, T., KHORASANI, K. et TAFAZOLI, S. (2008). Parameter estimation-based fault detection, isolation and recovery for nonlinear satellite models. *IEEE Transactions on control systems technology*, 16(4):799–808.



- [Jiang et Wang, 2001] JIANG, Z.-P. et WANG, Y. (2001). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 37(6):857–869.
- [Kalman, 1960] KALMAN, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45.
- [Kankar et al., 2013] KANKAR, P. K., SHARMA, S. C. et HARSHA, S. P. (2013). Fault diagnosis of rolling element bearing using cyclic autocorrelation and wavelet transform. *Neurocomputing*, 110:9–17.
- [Kurovsky, 2002] KUROVSKY, M. (2002). *Etude des systèmes dynamiques hybrides par représentation d'état discrète et automate hybride*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- [Lamouchi et al., 2016] LAMOUCHE, R., AMAIRI, M., RAÏSSI, T. et AOUN, M. (2016). Interval observer design for linear parameter-varying systems subject to component faults. In *IEEE 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), 2016*, pages 707–712.
- [Lian et al., 2011] LIAN, J., FENG, Z. et SHI, P. (2011). Observer design for switched recurrent neural networks : an average dwell time approach. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(10):1547–1556.
- [Liberzon, 2012] LIBERZON, D. (2012). *Switching in systems and control*. Springer Science & Business Media.
- [Lin et Antsaklis, 2009] LIN, H. et ANTSAKLIS, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems : a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic control*, 54(2):308–322.
- [Lin et Gao, 2015] LIN, J. et GAO, Z. (2015). Observers design for switched discrete-time singular time-delay systems with unknown inputs. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 18:85–99.
- [Luenberger, 1964] LUENBERGER, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, 8(2):74–80.
- [Mazenc et Bernard, 2010a] MAZENC, F. et BERNARD, O. (2010a). Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2):523–527.

- [Mazenc et Bernard, 2010b] MAZENC, F. et BERNARD, O. (2010b). Interval observers for linear systems with additive disturbances. *In Proc. NOLCOS Conf., Bologna, Italy*.
- [Mazenc et Bernard, 2011] MAZENC, F. et BERNARD, O. (2011). Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1):140–147.
- [Mazenc et Bernard, 2014] MAZENC, F. et BERNARD, O. (2014). Iss interval observers for nonlinear systems transformed into triangular systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(7):1241–1261.
- [Mazenc et al., 2014] MAZENC, F., DINH, T. N. et NICULESCU, S. I. (2014). Interval observers for discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(17):2867–2890.
- [Meghnous, 2013] MEGHNOUS, A. R. (2013). *Commande et observation d'une classe de systèmes linéaires à commutations : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC*. Thèse de doctorat, Lyon, INSA.
- [Meslem et Ramdani, 2011] MESLEM, N. et RAMDANI, N. (2011). Interval observer design based on nonlinear hybridization and practical stability analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(3):228–248.
- [Minc, 1988] MINC, H. (1988). *Nonnegative matrices*. Wiley.
- [Patton, 1994] PATTON, R. J. (1994). Robust model-based fault diagnosis : the state of the art. *IFAC Proceedings Volumes*, 27(5):1–24.
- [Pessel et al., 2007] PESSEL, N., BALMAT, J.-F., LAFONT, F. et BONNAL, J. (2007). An improved pca fault detection for the diagnosis. *In Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Automatic Control, Modeling & Simulation*.
- [Pettersson, 2005] PETTERSSON, S. (2005). Observer design for switched systems using multiple quadratic lyapunov functions. *In Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation*, pages 262–267.
- [Raïssi et al., 2012a] RAÏSSI, T., EFIMOV, D. et ZOLGHADRI, A. (2012a). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1):260–265.

- [Raïssi *et al.*, 2012b] RAÏSSI, T., EFIMOV, D. et ZOLGHADRI, A. (2012b). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1):260–265.
- [Raïssi *et al.*, 2010] RAÏSSI, T., VIDEAU, G. et ZOLGHADRI, A. (2010). Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3): 518–527.
- [Salah, 2009] SALAH, J. B. (2009). *Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : application aux systèmes dynamiques à commutation*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard-Lyon I; Université de Sfax. Faculté des sciences (Sfax, Tunisie).
- [Serres *et al.*, 2011] SERRES, U., VIVALDA, J.-C. et RIEDINGER, P. (2011). On the convergence of linear switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(2):320–332.
- [Sontag, 2008] SONTAG, E. D. (2008). Input to state stability : Basic concepts and results. *In Nonlinear and optimal control theory*, pages 163–220. Springer.
- [Sreedhar *et al.*, 1993] SREEDHAR, R., FERNANDEZ, B. et MASADA, G. (1993). Robust fault detection in nonlinear systems using sliding mode observers. *In Second IEEE Conference on Control Applications, 1993.*, pages 715–721.
- [Staroswiecki et Gehin, 2001] STAROSWIECKI, M. et GEHIN, A.-L. (2001). From control to supervision. *Annual Reviews in Control*, 25:1–11.
- [Sun *et al.*, 2002] SUN, Z., GE, S. S. et LEE, T. H. (2002). Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 38(5):775–786.
- [Tanwani *et al.*, 2011] TANWANI, A., SHIM, H. et LIBERZON, D. (2011). Observability implies observer design for switched linear systems. *In Proceedings of the 14th international conference on Hybrid systems : computation and control*, pages 3–12. ACM.
- [Tanwani *et al.*, 2013] TANWANI, A., SHIM, H. et LIBERZON, D. (2013). Observability for switched linear systems : Characterization and observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4):891–904.

- [Thabet *et al.*, 2013] THABET, R. E. H., RAISSI, T., COMBASTEL, C. et ZOLGHADRI, A. (2013). Design of interval observers for lpv systems subject to exogenous disturbances. *In IEEE European Control Conference (ECC)*, pages 1126–1131.
- [Tian, 2010] TIAN, Y. (2010). *Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [Trabelsi, 2009] TRABELSI, M. A. (2009). *Modélisation et Commande des Systèmes Physiques à Topologie Variable : Application au Convertisseur Multicellulaire*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [Van Gorp *et al.*, 2014] VAN GORP, J., DEFOORT, M., VELUVOLU, K. C. et DJEMAI, M. (2014). Hybrid sliding mode observer for switched linear systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 351(7):3987–4008.
- [Vasiljevic et Khalil, 2008] VASILJEVIC, L. K. et KHALIL, H. K. (2008). Error bounds in differentiation of noisy signals by high-gain observers. *Systems & Control Letters*, 57(10):856–862.
- [Videau, 2009] VIDEAU, G. (2009). *Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- [Wang et Daley, 1996] WANG, H. et DALEY, S. (1996). Actuator fault diagnosis : An adaptive observer-based technique. *IEEE transactions on Automatic Control*, 41(7): 1073–1078.
- [Xu *et al.*, 2017] XU, F., TAN, J., WANG, X., PUIG, V., LIANG, B., YUAN, B. et LIU, H. (2017). Generalized set-theoretic unknown input observer for lpv systems with application to state estimation and robust fault detection. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(17):3812–3832.
- [Yan et Edwards, 2007] YAN, X.-G. et EDWARDS, C. (2007). Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer. *Automatica*, 43(9):1605–1614.
- [Yang *et al.*, 2017] YANG, J., CHEN, Y., ZHU, F. et WANG, F. (2017). Simultaneous state and output disturbance estimations for a class of switched linear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 48(1):22–33.

- [Yousfi *et al.*, 2014] YOUSFI, B., RAÏSSI, T., AMAIRI, M. et AOUN, M. (2014). Interval observers design for singularly perturbed systems. *In IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2014*, pages 1637–1642.
- [Zhang *et al.*, 2016] ZHANG, H., ZHANG, G. et WANG, J. (2016).  $h_\infty$  observer design for lpv systems with uncertain measurements on scheduling variables : Application to an electric ground vehicle. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(3):1659–1670.
- [Zhang, 2002] ZHANG, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(3): 525–529.
- [Zhang et Yang, 2017] ZHANG, Z.-H. et YANG, G.-H. (2017). Fault detection for discrete-time lpv systems using interval observers. *International Journal of Systems Science*, 48(14):2921–2935.
- [Zhong *et al.*, 2003] ZHONG, M., DING, S. X., LAM, J. et WANG, H. (2003). An lmi approach to design robust fault detection filter for uncertain lti systems. *Automatica*, 39(3):543–550.
- [Zhong *et al.*, 2015] ZHONG, M., SONG, Y. et DING, S. X. (2015). Parity space-based fault detection for linear discrete time-varying systems with unknown input. *Automatica*, 59:120–126.
- [Zolghadri, 2012] ZOLGHADRI, A. (2012). Advanced model-based fdir techniques for aerospace systems : Today challenges and opportunities. *Progress in Aerospace Sciences*, 53:18–29.

	<b>Haifa ETHABET</b> Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations : Application au diagnostic	
---	--	---

## Résumé

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse s'intéressent au diagnostic des systèmes à commutations par approche ensembliste. Un état de l'art sur les techniques de diagnostic et d'observation des systèmes à commutations ainsi que les méthodes de synthèse des observateurs intervalles est présenté. Ainsi, ce mémoire est scindé en deux parties. Dans un premier temps, des observateurs intervalles pour les systèmes linéaires à commutations sont synthétisés. Ces observateurs fournissent un encadrement garanti contenant toutes les valeurs admissibles de l'état. Les perturbations et le bruit de mesure, auxquels est soumis le système considéré, sont supposés inconnus mais bornés et de bornes connues a priori. Dans un deuxième temps, des méthodes de diagnostic sont proposées en se basant sur la génération des résidus intervalle par les observateurs intervalles. Ces contributions sont validées par des exemples numériques.

**Mots clés :** Diagnostic, observateurs intervalles, systèmes à commutations, positivité, stabilité.

## Abstract

The research work presented in this thesis deals with the diagnosis of switched systems by set-membership approaches. A state of the art for the diagnosis and observation techniques as well as the design methods of interval observers is presented. Thus, the report of this thesis is split into two parts. Firstly, interval observers for switched linear systems are developed. These observers provide a guaranteed set that contains all the admissible values of the state. The disturbances and the measurement noise are supposed to be unknown, but bounded with a priori known bounds. Secondly, approaches of diagnosis are proposed based on interval residual generation using interval observers. These contributions are validated through numerical simulations.

**Keywords :** Diagnosis, interval observers, switched systems, positivity, stability.